Конспект лекций
по дисциплине
«Высшая математика -2»

Межрегиональный учебный центр переподготовки специалистов
Разработчик: доцент, к.т.н. Храмова Татьяна Викторовна

Конспект содержит сведения, необходимые для освоения курса, успешного выполнения контрольной работы и сдачи экзамена.

Не возбраняется использовать дополнительные источники информации, содержащие более развернутую информацию: доказательства утверждений и выводы формул.

В конце каждого раздела Вы найдёте задачи для самостоятельного решения и вопросы для самопроверки.

Примеры решения задач вы найдёте на нашем канале на YouTube:

https://www.youtube.com/channel/UC0k6GOLytUlutfqtpN7lk9Q

Также Вы можете использовать сборники задач для самостоятельного решения и закрепления материала, которые представлены в электронном виде на сайте библиотеки СибГУТИ и в базе IPRBooks:

1. Дмитриева, О. Е. Сборник задач по математическому анализу. 1 семестр, http://www.iprbookshop.ru/54798

2. Дмитриева, О. Е. Сборник задач по математическому анализу. 2 семестр, http://www.iprbookshop.ru/54799

Содержание

6 Кратные интегралы

6.1 Двойной интеграл в декартовых координатах

6.1.1 Определение двойного интеграла

Давайте немножко окунемся в воспоминания... Определённый интеграл определялся так (Рисунок 1):
Пусть дана функция и участок интегрирования. Чтобы найти определённый интеграл по этому участку, надо: 1) разбить участок интегрирования на участки (подграфик разобьется на столбики с кривой верхней стороной);
2) вычислить значение функции где-нибудь на каждом кусочке;
3) найти приближенно площадь каждого столбика - умножить длину участка на высоту
4) составить интегральную сумму - сумма площадей столбиков
5) найти предел этой суммы, равномерно увеличивая количество участков при разбиении.

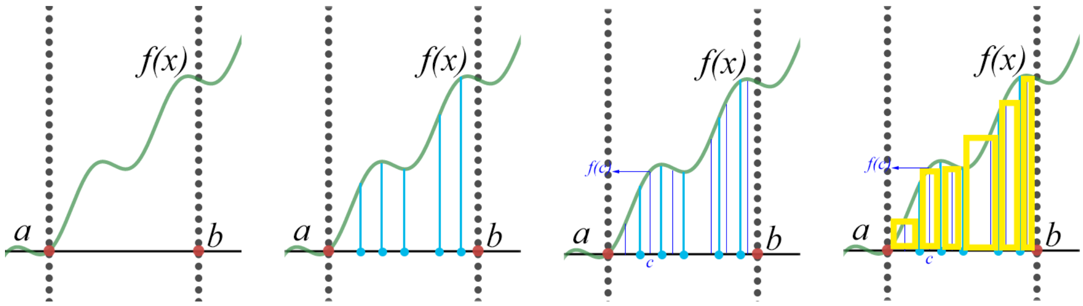

Рисунок 1 - Этапы построения интегральной суммы

Определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ — это предел интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части и от выбора точек ξ_i :

$$\int\limits_a^b f\,(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Повторим все эти шаги, но для *области*, а не для отрезка.
Пусть непрерывная функция $z = f(x, y)$ задана в замкнутой области D.
Разобьем D на n частей: $D_1, D_2, \ ...D_n$,
а их площади обозначим $\Delta S_1, \Delta S_2, \ ...\Delta S_n$.

На каждом участке D_i выберем точку $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$.
Составим интегральную сумму: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i$.

Двойной интеграл функции $z = f(x, y)$ по области D — это предел интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения области на части $D_1, D_2, \ ...D_n$ и от выбора точек $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$:

$$\iint\limits_D f\,(x, y)\, dS = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \qquad (1)$$

6.1.2 Свойства двойного интеграла

1. $\iint\limits_D 1 dS = S_D$.

2. $\iint\limits_D (af(x, y) + bg(x, y))\, dS = a \iint\limits_D f(x, y) dS + b \iint\limits_D g(x, y) dS$.

3. $\iint\limits_D f(x, y) dS = \sum\limits_i \iint\limits_{D_i} f(x, y) dS, \quad D = \bigcup\limits_i D_i, \quad D_i \cap D_j = \emptyset, \ \forall i, j$

4. $m \leqslant f(x, y) \leqslant M, \ (x, y) \in D \Rightarrow m S_D \leqslant \iint\limits_D f(x, y) dS \leqslant M S_D$

5. $\exists (x_o, y_o) \in D : \quad \iint\limits_D f(x, y) dS = f(x_o, y_o) \cdot S_D$

6.1.3 Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Так как интеграл не зависит от способа разбиения области на участки, то разделим область прямыми, параллельными координатным осям (Рисунок 2). Тогда площадь каждого элементарного кусочка будет равна $\Delta S_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$, и интеграл можно вычислить по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y) dS = \iint\limits_D f(x, y) dx dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{f_\text{н}}^{f_\text{в}} f(x, y) dy \right) dx, \qquad (2)$$

указав пределы интегрирования по каждой координате, последовательно исключая их (сначала определяем как меняется значение y - от кривой до кривой, а затем определяем пределы для x - от числа до числа).

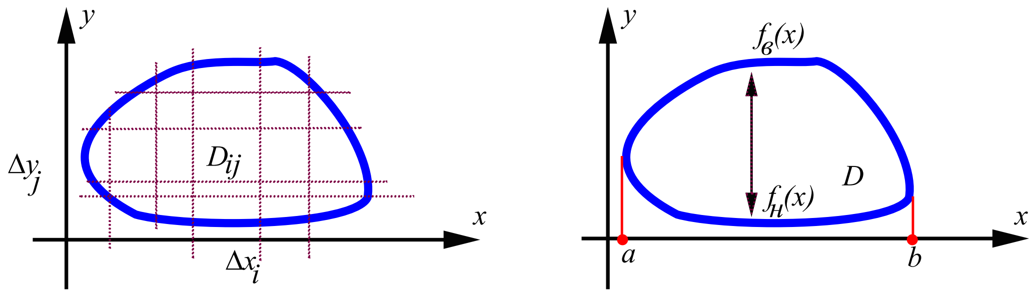

Рисунок 2 - Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Переменные в (2)можно поменять ролями: сначала определить как меняется x, а потом уже рассматривать y (Рисунок 3). Тогда формула (1) принимает вид:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dS = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{f_{\text{н}}}^{f_{\text{в}}} f(x,y)dy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{f_{\text{лев.}}}^{f_{\text{прав.}}} f(x,y)dx. \qquad (3)$$

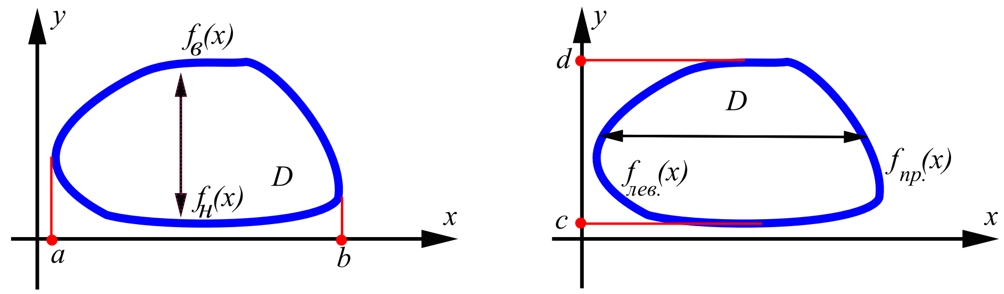

Рисунок 3 - Смена пределов интегрирования в декартовых координатах

Замечание: если любая прямая, параллельная координатной оси пересекается с границей области не более, чем в двух точках (за исключением участков границы, параллельных оси), то такая область - правильная область (в направлении данной оси).

6.2 Тройной интеграл в декартовых координатах

6.2.1 Определение тройного интеграла

Пусть функция $u = f(x,y,z)$ непрерывна в правильной замкнутой области T. Составим интегральную сумму: разобьем V на n частей: $T_1, T_2, \ ...T_n$, а их объемы обозначим $\Delta V_1, \Delta V_2, \ ...\Delta V_n$. На каждом участке выберем точку $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in T_i$. Составим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta V_i.$$

Тройной интеграл функции $u = f(x, y, z)$ по области T — это предел интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения области на части $T_1, T_2, \ ...T_n$ и от выбора точек $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in T_i$:

$$\iiint\limits_T u\,(x, y, z)\,dV = \lim_{\max \Delta V_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta V_i. \qquad (4)$$

6.2.2 Свойства тройного интеграла

1. $\iiint\limits_T 1dV = V_T$

- интеграл от единицы равен объему области интегрирования.

2. $\iiint\limits_T (a \cdot u(x, y, z) + b \cdot w(x, y, z))\,dV =$

$= a\iiint\limits_D u(x, y, z)dV + b\iiint\limits_D w(x, y, z)dV, \quad a, b \in R$ - линейность.

3. $\iiint\limits_T u(x, y, z)dV = \sum\limits_i \iiint\limits_{T_i} u(x, y, z)dV,$

$T = \bigcup\limits_i T_i, \ T_i \cap T_j = \emptyset, \ \forall i, j$ - аддитивность.

4. $m \leq u(x, y, z) \leq M, \ (x, y, z) \in T$

$\Rightarrow mV_T \leq \iiint\limits_T u(x, y, z)dV \leq MV_T$ - оценка значения интеграла.

5. $\exists (x_o, y_o, z_o) \in T: \quad \iiint\limits_T u(x, y, z)dV = u(x_o, y_o, z_o) \cdot V_T$

- теорема о среднем

6.2.3 Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Если прямая, параллельная координатной оси пересекается с границей области не более, чем в двух точках, то область *правильная*. Работаем только с такими. Если область неправильная, то разбиваем её на правильные куски.

Разбив правильную область интегрирования плоскостями (Рисунок 4), параллельными координатным осям, для дифференциала объема получим формулу $dV = dxdydz$. Пределы интегрирования определяем последовательно "исключая"переменные: сначала определим как изменяется z - от поверхности до поверхности; затем, по проекции области на плоскость Oxy, определяем, как изменяется y (Рисунок 4, справа); и, наконец, определяем интервал изменения x:

$$\iiint\limits_T u(x,y,z)dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_{\text{н.}}}^{y_{\text{в.}}} dy \int\limits_{z_{\text{н.}}}^{z_{\text{в.}}} u(x,y,z)dz. \qquad (5)$$

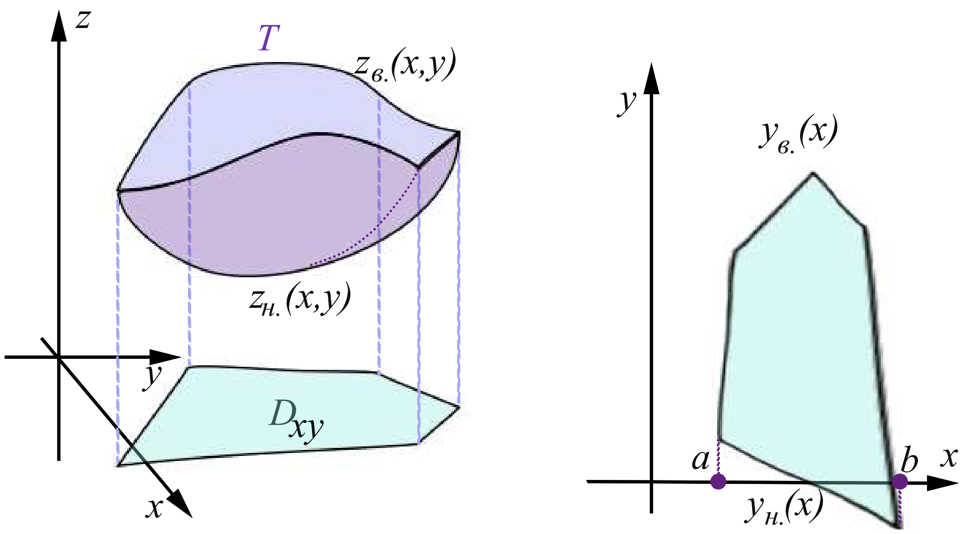

Рисунок 4 - Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Порядок исключения переменных (т.е. их последовательность в интеграле) можно менять.

6.3 Двойной интеграл в полярных координатах

Положение точки на плоскости однозначно определяется расстоянием до начала координат ρ и углом φ между радиус-вектором точки и положительным направлением горизонтальной оси (Рисунок 5), таким образом, декартовы координаты можно выразить следующим образом через **полярные координаты** ρ и φ:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \; \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

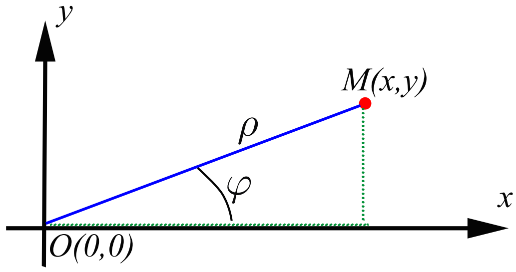

Рисунок 5 - Полярные координаты

Разобьём правильную область интегрирования лучами и окружностями (на сектора и кольца, Рисунок 6), тогда площадь каждого элементарного участка будет выражаться формулой

$$\Delta S = \frac{\pi\left((\rho + \Delta\rho)^2 - \rho^2\right)}{2\pi} \cdot \Delta\varphi = \frac{1}{2}\left(2\rho\Delta\rho + (\Delta\rho)^2\right) \cdot \Delta\varphi, \qquad (6)$$

так как $\pi\rho^2, \; \pi(\rho + \Delta\rho)^2$ - площади кругов, ограничивающих D_{ij}; $\pi\left((\rho + \Delta\rho)^2 - \rho^2\right)$ - площадь кольца; При $\Delta\rho \to 0, \; \Delta\varphi \to 0$, выражение (6) стремится к $\rho\Delta\rho\Delta\varphi$.

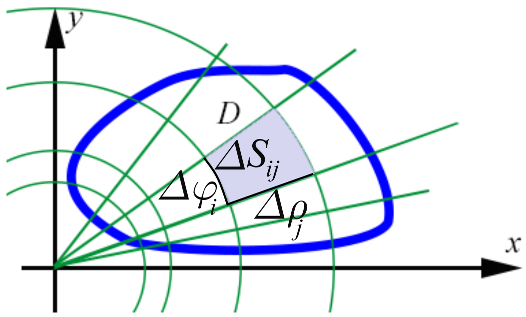

Рисунок 6 - Дифференциал площади в полярных координатах

Выполнив замену $x = \rho\cos\varphi, \; y = \rho\sin\varphi, \; dS = \rho d\varphi d\rho$, в (2) получим:

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_{\text{б.}}(\varphi)}^{\rho_{\text{д.}}(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho,$$

где пределы интегрирования меняются вдоль луча и дуги окружности (Рисунок 7).

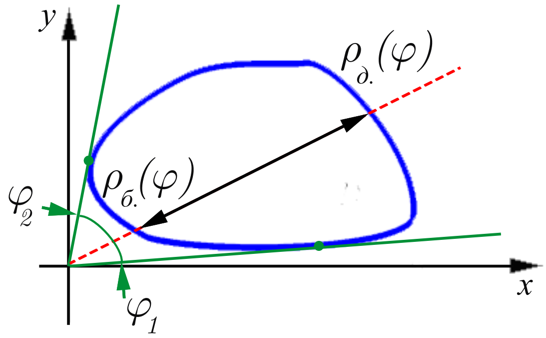

Рисунок 7 - Пределы интегрирования в полярных координатах

6.4 Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах

6.4.1 Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Цилиндрические координаты определяются следующим образом:

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z.$$

Фактически в плоскости Oxy они совпадают с полярными координатами, а по вертикальной оси - с декартовыми (Рисунок 8).

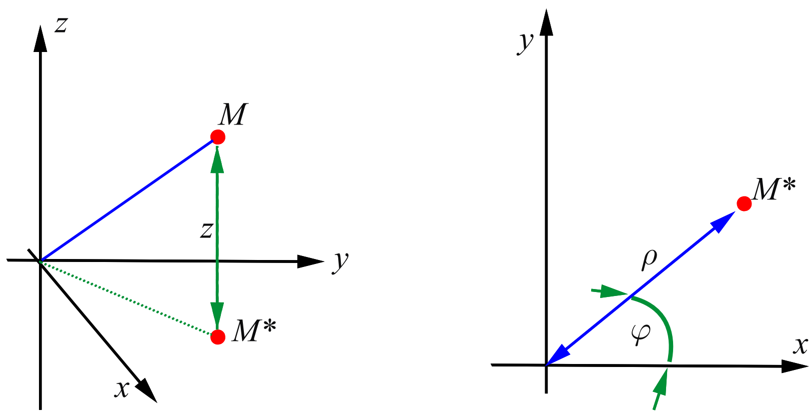

Рисунок 8 - Цилиндрические координаты

Разобьем правильную область интегрирования на слои, параллельно плоскости Oxy, а затем на сектора и кольца, аналогично разбиению в полярных координатах (Рисунок 9). Дифференциал объема в этом случае выражается формулой $dV = \rho d\rho d\varphi dz$, а формула (5) принимает вид

$$\iiint\limits_T u(x,y,z)dV = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho \int\limits_{z_1}^{z_2} u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho dz. \qquad (7)$$

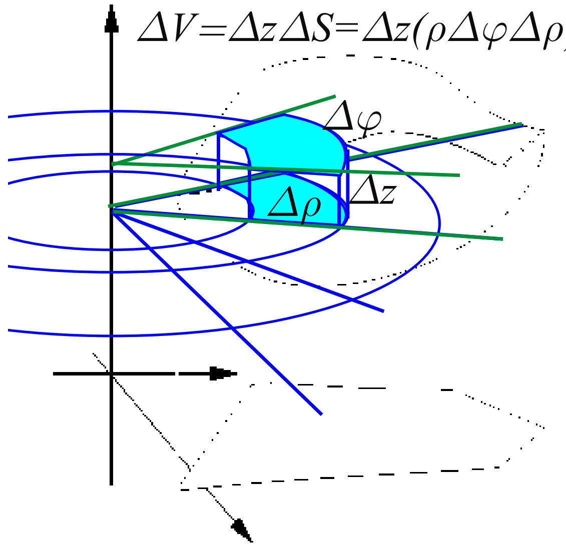

Рисунок 9 - Дифференциал объема в цилиндрических координатах

Определение пределов интегрирования в цилиндрических координатах происходит следующим образом: сначала определяем, как изменяется z (Рисунок 10, слева), а затем по проекции на плоскость Oxy определяем пределы для ρ и φ (Рисунок 10, справа).

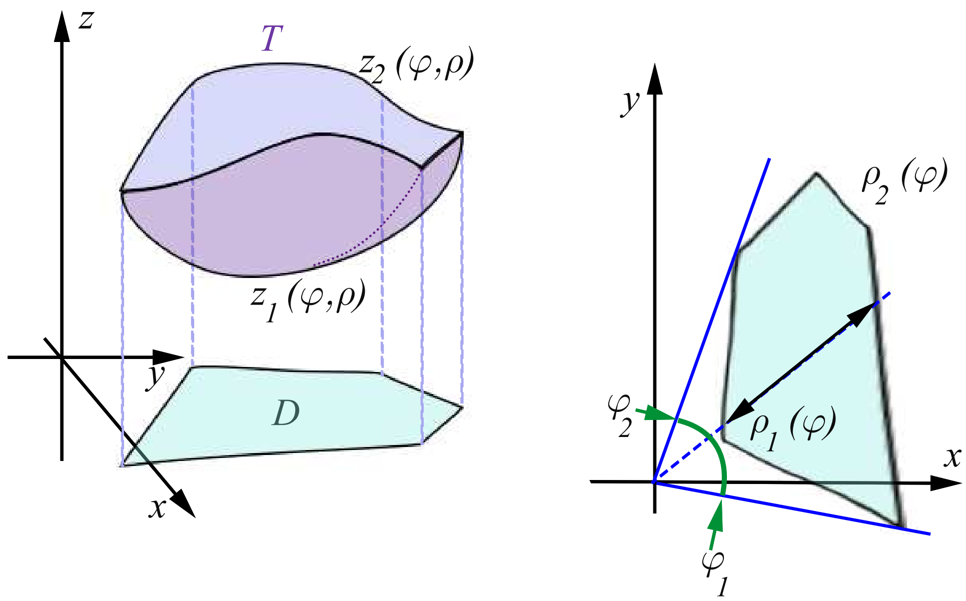

Рисунок 10 - Пределы интегрирования в цилиндрических координатах

6.4.2 Тройной интеграл в сферических координатах

Как можно указать положение точки? Ну допустим вы пытаетесь в неё попасть из начала координат. Давайте рассуждать. Первый способ - декартовы координаты - это когда вы пытаетесь попасть в точку, например, пешком: вперёд x метров, направо - y метров, вверх - z метров. Второй способ - это если вам надо попасть в точку, например, из лука: вы поворачиваетесь в направлении точки сначала в горизонтальной плоскости на угол φ, затем вверх на угол θ, затем определяете мощность выстрела, для того, чтобы стрела пролетела на требуемую дальность ρ. Второй способ отражает всю суть сферических координат в пространстве (Рисунок 11).

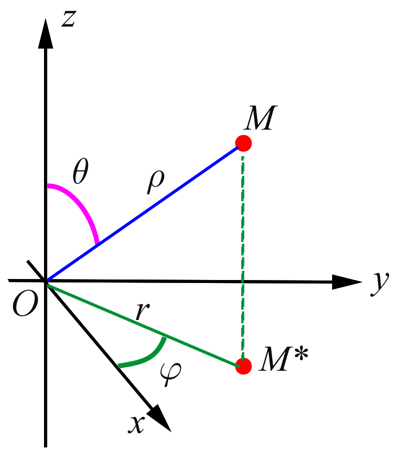

Рисунок 11 - Сферические координаты

Итак, обозначим через φ - угол между проекцией радиус-вектора точки M на плоскость Oxy и положительным направлением оси Ox, M^* - проекция точки M на плоскость Oxy, а r - длина этой проекции радиус-вектора. Тогда в плоскости Oxy:

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi.$$

Пусть θ - угол между радиус-вектором точки и положительным направлением оси Oz, а ρ - длина этого радиус-вектора. Из треугольника $OMM*$:

$$OM* = OM\cos(90^o - \theta), \quad MM* = OM\cos\theta.$$

Используем равенство $r = \rho\sin\theta$, чтобы исключить r:

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = \rho\cos\theta, \tag{8}$$

где $\rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi$.

Дифференциал объёма (Рисунок 12) в сферических координатах вычисляется по формуле

$$dV = \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta. \tag{9}$$

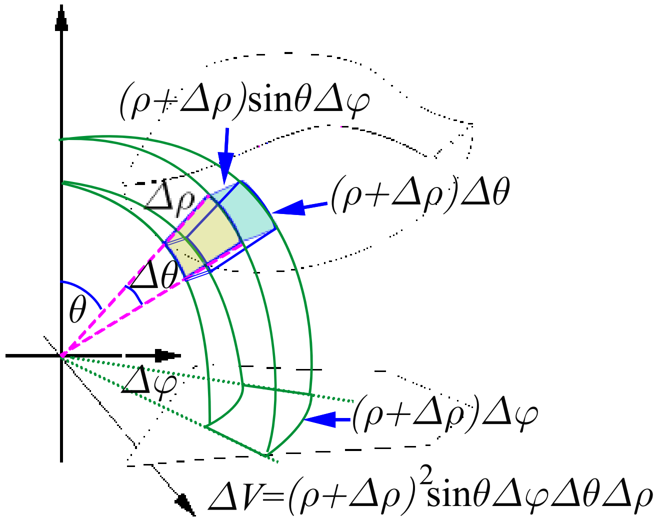

Рисунок 12 - Дифференциал объёма в сферических координатах

Из (4), (8) и (9), указав пределы интегрирование в порядке (слева направо) "по φ, по θ, по ρ"(Рисунок 13), получаем

$$\iiint\limits_T u(x,y,z)dV = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} u(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2 \sin\theta d\rho \tag{10}$$

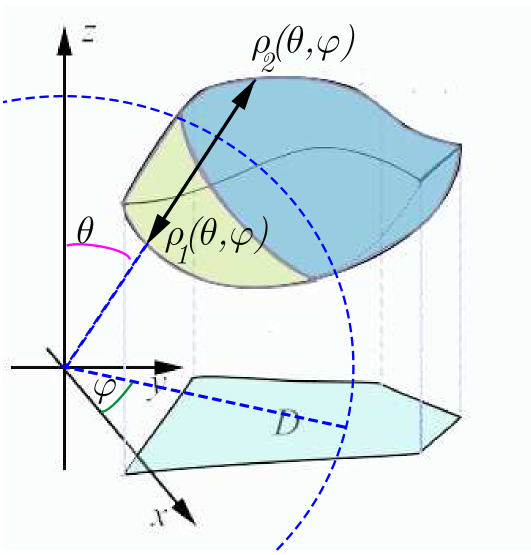

Рисунок 13 - Пределы интегрирования в сферических координатах

6.5 Приложения кратных интегралов

6.5.1 Геометрические приложения двойных интегралов

1. Площадь плоской области D:

$$S_D = \iint\limits_D ds. \tag{11}$$

2. Объем цилиндрического тела с основанием D, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$:

$$V_{D,f} = \iint\limits_D f(x, y) dS. \tag{12}$$

3. Площадь части поверхности $z = f(x, y)$, проецируемая в область D на Oxy:

$$S_D = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2} dS \tag{13}$$

6.5.2 Механические приложения двойных интегралов

Пусть $z = \mu(x, y)$ - функция плотности, тогда

1. Масса пластины формы D:

$$S_D = \iint\limits_D \mu(x, y) ds. \tag{14}$$

2. Координаты центра масс:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\mu(x, y)ds}{\iint\limits_D \mu(x, y)ds}; \; y_c = \frac{\iint\limits_D y\mu(x, y)ds}{\iint\limits_D \mu(x, y)ds} \tag{15}$$

Пример 1.
Допустим необходимо изготовить деталь (Рисунок 14) из золота и покрыть её платиной.

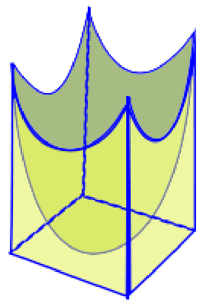

Рисунок 14 - Деталь

Верхняя часть этого цилиндрического тела аккуратненько вырезана по форме дыни, Основание - квадрат 2x2 кв.м., высота - 2 м.

Вопрос: сколько ресурсов потребуется на изготовление?

1) Каков объем этой... штуки? Это мы узнаем, вычислив интеграл (12) от функции, задающей "верх по области, над которой этот верх распростёрт - это 2x2 квадрат.

2) Каковы площади поверхностей? И такая формула есть. Причем все боковые поверхности можно "обсчитать"с помощью обычного, "одинарного"определённого интеграла из прошлого семестра, а вот верхнюю - по специальной формуле - (13).

Но это всё потом. А сначала надо бы понять, какими уравнениями можно задать эту конструкцию? Хотя бы примерно. Боковушки и низ - это плоскости. Самое близкое по форме к "дыне" - это параболоид (ну или эллипс... но мне больше нравится параболоид). Пусть начало координат у нас будет в вершине параболоида, тогда уравнения, задающие тело выглядят так:

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 0, \quad x = \pm 1, \; y = \pm 1.$$

В точках $(\pm 1, \pm 1)$ значения параболоида одинаковые и равны 2.

Итак, по формуле (12) вычислим объем цилиндрического тела с основанием D, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$

$$V = \iint\limits_D (x^2 + y^2) ds = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-1}^{1} (x^2 + y^2) dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{1} dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(2x^2 + \frac{2}{3} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{2x}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{3} = 2,67,$$

где 2,67 кубометра золота - это примерно 51466,67 кг.

Вычислим площади боковушек и дна. Дно - 2×2 = 4 кв.м. Боковушки - результат сечения параболоида плоскостями (Рисунок 15).

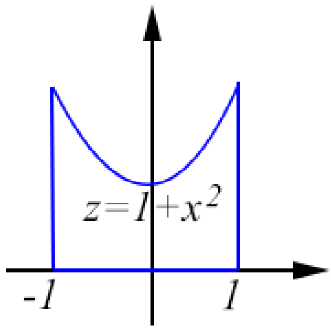

Рисунок 15 - Проекция детали

Площадь плоской области D вычислим по формуле (11):

$$S_D = \iint\limits_D ds = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1+x^2} dy = \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{3} = 2,67.$$

Итого площадь боковушек и дна: $2,67 \times 4 + 4 = 14,68$ кв. метров.

Вычислим площадь вогнутого верха. Площадь части поверхности $z = f(x, y)$, проецируемая в область D на Oxy вычисляется по формуле (13):

$$S_D = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2} ds = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dy = ...$$

$$... = (\text{страдания и терпение})... = 7,45 \ (\text{кв.метров}).$$

Сколько килограммов платины потребуется, чтобы покрыть деталь слоем 1 мм.? Сложим, умножим, найдем данные по весу и плотности в интернете... и получим

$$(14,68 + 7,45) \times 0,001 = 0,02213 \ (\text{ куб. метра}),$$

$$2,213 \times 21450 = 474,6885 = 475 \text{ (кг. платины)}.$$

Плюс-минус килограмм, но зачем мелочиться?

Итак, **ответ**: имея всего лишь 51466,67 кг. золота и 475 кг. платины вы сможете изготовит великолепную скульптуру (Рисунок 14), которая украсит любую дачу. Думаю мораль понятна: пока ресурсы дешевые и их много, никакой нужды в интегралах нет, но как только речь идет о дорогостоящем (как ресурсах, так и работе), то польза от точных вычислений очевидна.

Пример 2. Найдите центр масс у детали, изображенной на Рисунке 16, которая представляет собой "четверть"конструкции, исследованной в предыдущем примере.

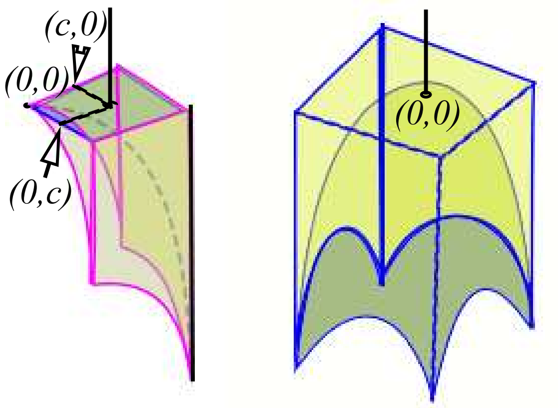

Рисунок 16 - Иллюстрация к примеру 2

Решение. В качестве функции плотности распределения массы можно рассматривать функцию, задающую поверхность (параболоид). Тогда задача сводится к вычислению центра масс плоской пластины и, согласно (15):

$$c = \frac{\iint\limits_D xM(x^2+y^2)ds}{\iint\limits_D M(x^2+y^2)ds} = \frac{M\iint\limits_D x(x^2+y^2)ds}{M\iint\limits_D (x^2+y^2)ds} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 x(x^2+y^2)dy}{2/3} = 1,5\int\limits_0^1 \left(x^3 y + \frac{xy^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 dx =$$

$$= 1,5\int\limits_0^1 \left(x^3 + \frac{x}{3}\right)dx = 1,5\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{6}\right)\Bigg|_0^1 = 1,5\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{8}.$$

Ответ: координаты центра масс $(\frac{5}{8}, \frac{5}{8})$. Именно здесь надо сверлить петельку для того, чтобы конструкция (Рисунок 16) висела ровно.

6.6 Задания для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_1^3 dy \int\limits_2^5 \frac{dx}{(x+2y)^2}$;

2) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} \frac{xdy}{x^2+y^2}$;

3) $\int\limits_2^4 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x} dy$;

4) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x dx$.

Для данных областей записать два варианта повторного интеграла:

5) D - прямоугольник с вершинами $(1,2),\ (5,2),\ (5,4),(1,4)$;

6) D: $x^2+y^2=2a^2,\ x^2=ay,\ (a>0, y>0)$.

Расставить пределы интегрирования в полярных координатах:

7) $\int\limits_0^R \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\,(x,y)\mathrm{d}y$;

8) $\int\limits_{R/2}^{2R} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f\,(x,y)\mathrm{d}x$.

Вычислить тройные интегралы:

9) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} zdz$;

10) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} dy \int\limits_{(x^2+y^2)/3}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz$.

Ответы к заданиям.

1) $\frac{1}{2}\ln\frac{14}{11}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) 9; 4) 1/24; 5) $\int\limits_1^5 dx \int\limits_2^4 f\,(x,y)dy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_1^5 f\,(x,y)dx$;

6) $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{x^2/a}^{\sqrt{2a^2-x^2}} f\,(x,y)dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} f\,(x,y)dx + \int\limits_a^{a\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} f\,(x,y)dx$;

7) $\int\limits_0^{\pi/2} d\phi \int\limits_0^R f\,(r\cos\phi, r\sin\phi)\, rdr$; 8) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int\limits_{R/2\sin\phi}^{2R\sin\phi} f\,(r\cos\phi, r\sin\phi) r\mathrm{d}r$; 9) 1/6;

10) $19\pi/24$.

6.7 Вопросы для самопроверки к разделу 6

1. Как определяется двойной интеграл?

2. Каков геометрический смысл двойного интеграла?

3. Какими свойствами обладает двойной интеграл?

4. Что называется полярным координатами?

5. Как формулируется правило вычисления двойного интеграла?

6. Как формулируется теорема о среднем для двойного интеграла?

7. Как используется двойной интеграл для вычисления объема цилиндрического тела?

8. Как используется двойной интеграл для вычисления площади плоской фигуры?

9. Как определяется тройной интеграл?

10. Каков физический смысл тройного интеграла?

11. Каковы свойства тройного интеграла?

12. По какому правилу вычисляется тройной интеграл?

13. Как формулируется теорема о среднем для тройного интеграла?

14. Как используется тройной интеграл для вычисления объема тела?

15. Что называется цилиндрическими координатами?

16. Что называется сферическими координатами?

17. Как вычислить площадь поверхности с помощью интеграла?

18. Как вычислить центр масс пластины с помощью интеграла?

7 Дифференциальные уравнения

7.1 Дифференциальные уравнения: определение, вид решения. Задача Коши

Дифференциальное уравнение порядка n (ДУ) - это уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0. \qquad (16)$$

Решение ДУ - это функция $y(x)$, которая удовлетворяет ДУ (16). Решение ДУ получается в процессе интегрирования (обычно). С каждым интегрированием снижается порядок уравнения. А ещё с каждым интегрированием прибавляется слагаемое "$+C$ помните такое? В итоге n-кратного интегрирования получим **общий интеграл ДУ**:

$$\Phi(x, y(x), C_1, C_2, ..., C_n) = 0. \tag{17}$$

Если в(17) получается выразить искомую функцию явно, то получим **общее решение ДУ**:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n). \tag{18}$$

Решение, полученное из общего (18) при конкретном значении констант C_i, называется **частным решением / частным интегралом.**

Чтобы найти **частное решение**, формулируется **задача Коши**:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0,$$

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y_1,\ y''(x_o) = y_2,\ ..., y^{(n-1)}(x_o) = y_{n-1}. \tag{19}$$

7.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

ДУ 1-го порядка имеет вид: $F(x, y, y') = 0$. Далее перечислены некоторые виды ДУ 1-го порядка и методы их решения.

7.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

ДУ с разделяющимися переменными - это уравнение вида

$$f(x)dx = g(y)dy. \tag{20}$$

Решение уравнения (20) заключается в его преобразовании (разделении сомножителей на две группы) и интегрировании:

$$f(x)dx = g(y)dy \ \Rightarrow \ \int f(x)dx = \int g(y)dy.$$

Пример. Решите уравнение $y' = \dfrac{x^3}{y^2}$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y^2},$$

$$y^2dy = x^3dx,$$
$$\int y^2dy = \int x^3dx,$$
$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^4}{4} + C \text{ – общий интеграл уравнения.}$$

7.2.2 Однородные ДУ 1-го порядка

Однородное ДУ 1-го порядка- это уравнение вида
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{21}$$
Решение уравнения (21) заключается в использовании подстановки
$$y(x) = u(x) \cdot x, \quad y' = u'x + u.$$
Уравнение превратится в уравнение с разделяющимися переменными:
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow y = ux \Rightarrow u'x + u = f(u) \Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Пример. Решите уравнение $y' = \dfrac{x^2}{y^2}$

Решение.
$$u'x + u = \frac{1}{u^2},$$
$$u'x = \frac{1-u^3}{u^2},$$
$$\frac{du}{dx}x = \frac{1-u^3}{u^2},$$
$$\frac{u^2du}{1-u^3} = \frac{dx}{x},$$
$$\int \frac{u^2du}{1-u^3} = \int \frac{dx}{x},$$
$$-\frac{1}{3}\int \frac{d(1-u^3)}{1-u^3} = \int \frac{dx}{x},$$
$$-\frac{1}{3}\ln|1-u^3| = \ln|x| + C,$$
$$|(1-u^3)^{-1/3}| = |Cx|,$$
$$\frac{x^3}{x^3-y^3} = Cx^3 \text{ – общий интеграл уравнения.}$$

7.2.3 Линейные ДУ 1-го порядка

Линейное ДУ 1-го порядка - это уравнение, которое можно привести к виду

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{22}$$

Метод Бернулли для решения линейных ДУ заключается в замене переменных

$$y = u(x) \cdot v(x), \quad y' = u'v + v'u:$$

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \quad \Rightarrow \quad u'v + v'u + puv = q$$

$$u'v + (v' + pv)u = q$$

$$v' + pv = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -pdx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -\int pdx, \quad v^* = e^{-\int pdx}$$

$$u'v + (v' + pv)u = q \quad \Rightarrow \quad u'v^* = q, \quad du = \frac{q}{v^*}dx, \quad u = \int \frac{q}{v^*}dx$$

$$y = e^{-\int pdx} \cdot \int \frac{q}{v^*}dx$$

Пример 1. Решите уравнение методом Бернулли

$$y' + 2xy = x.$$

Решение: $y = uv, \quad y' = u'v + v'u, u'v + u(v' + 2vx) = x,$

$$u(v' + 2vx) = 0, \quad v' = -2vx,$$

$$\frac{dv}{dx} = -2vx, \quad \frac{dv}{v} = -2xdx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int 2xdx, \quad \ln|v| = -x^2 + C, \quad v = Ce^{-x^2}, \quad v^* = e^{-x^2},$$

$$u'v^* = x, \quad u'e^{-x^2} = x, \quad u' = xe^{x^2}, \quad u = \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C,$$

$$y = uv = e^{-x^2}(\frac{1}{2}e^{x^2} + C) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}.$$

Метод Лагранжа для решения линейного ур-я $y' + py = q$ заключается в вариации произвольной постоянной, последовательном выполнении следующих шагов:

1) Находим решение однородного уравнения $y' + py = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -py, \quad \frac{dy}{y} = -pdx, \quad \ln y = -\int pdx + C, \quad y = Ce^{-\int pdx}.$$

2) Подставляем в уравнение y и варьируем C, представив её не как константу, а как функцию $C(x)$:

$$y' + py = q, \quad \Rightarrow \quad (Ce^{-\int pdx})' + Ce^{-\int pdx} \cdot p = q.$$

уравнение упрощается:

$$C'e^{-\int pdx} + Ce^{-\int pdx} \cdot (-p) + Ce^{-\int pdx} \cdot p = q, \quad \Rightarrow \quad C'e^{-\int pdx} = q.$$

Осталось найти C из уравнения $C'e^{-\int pdx} = q$:

$$C = \int qe^{\int pdx}.$$

3) Подставляем C:

$$y = Ce^{-\int pdx} = \int qe^{\int pdx} dx \cdot e^{-\int pdx}.$$

Пример 2. Решите уравнение методом Лагранжа

$$y' + 2xy = x.$$

Решение:

$$y' + 2xy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -2xy, \quad \frac{dy}{y} = -2xdx, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int 2xdx,$$

$$\ln|y| = -x^2 + C, \quad y = e^{-x^2+C}, \quad y = Ce^{-x^2} = C(x)e^{-x^2}$$

$$y' = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2} \cdot -2x,$$

$$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2} \cdot -2x + 2xC(x)e^{-x^2} = x,$$

$$C'(x)e^{-x^2} = x, \quad C'(x) = xe^{x^2}, \quad C(x) = \int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C_1,$$

$$y = Ce^{-x^2} = (\frac{1}{2}e^{x^2} + C_1)e^{-x^2} = \frac{1}{2} + C_1 e^{-x^2}.$$

7.2.4 Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли имеет вид

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)y^n, \ n \neq 0; 1. \tag{23}$$

Его можно решить сделав замену

$$y = u(x) \cdot v(x), \quad y' = u'v + v'u.$$

Пример 1. Решите уравнение $y' + 2xy = xy^3$.

Решение: $y = uv, \quad y' = u'v + v'u,$

$$u'v + u(v' + 2vx) = xu^3v^3, \quad u(v' + 2vx) = 0, \quad v' = -2vx,$$

$$\frac{dv}{v} = -2xdx, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int 2xdx, \quad \ln|v| = -x^2 + C, \quad v = Ce^{-x^2},$$

$$v^* = e^{-x^2}, \quad u'v^* = xu^3(v^*)^3, \quad u'e^{-x^2} = xu^3e^{-3x^2}, \quad \frac{du}{u^3} = xe^{-2x^2}dx,$$

$$\int \frac{du}{u^3} = \int xe^{-2x^2}dx, \quad -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{4}e^{-2x^2} + C, \quad u = \sqrt{\frac{2}{e^{-2x^2} + C}},$$

$$y = uv = e^{-x^2}\sqrt{\frac{2}{e^{-2x^2} + C}} = \sqrt{\frac{2}{1 + Ce^{2x^2}}}.$$

Можно провести решение (23) и другим способом.

Немножко изменим уравнение

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)y^n$$

до вида

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p}{y^{n-1}} = q(x).$$

Заметим, что

$$\left(\frac{1}{t^{n-1}}\right)' = \frac{t'(1-n)}{t^n}.$$

Сделаем замену

$$z(x) = \frac{1}{y^{n-1}}, \quad z' = -\frac{y'(1-n)}{y^n},$$

уравнение Бернулли примет вид

$$\frac{z'}{1-n} + pz = q$$

- это линейное уравнение (22).

Пример 2. Решите уравнение $y' + 2xy = xy^3$.

Решение.

$$z(x) = \frac{1}{y^2}, \quad z' = -\frac{2y'}{y^3},$$

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2x}{y^2} = x,$$

$$-\frac{z'}{2} + 2xz = x,$$

$$z' - 4xz = -2x,$$

$$z = uv, \ \ z' = u'v + v'u,$$

$$u'v + v'u - 4xuv = -2x,$$

$$u'v + u(v' - 4xv) = -2x, \quad v' - 4xv = 0, \quad \frac{dv}{v} = 4xdx,$$

$$\ln|v| = 2x^2 + C,$$

$$v^* = e^{2x^2},$$

$$u'v + u(v' - 4xv) = -2x \quad \Rightarrow \quad u'e^{2x^2} = -2x, \quad u = \frac{1}{2}e^{-2x^2} + C,$$

$$z = uv = e^{2x^2}(\frac{1}{2}e^{-2x^2} + C) = \frac{1}{2} + Ce^{2x^2},$$

$$z(x) = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2} + Ce^{2x^2},$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} + Ce^{2x^2}}} = \sqrt{\frac{2}{1 + Ce^{2x^2}}}.$$

7.3 Дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейное уравнение порядка n имеет вид

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (24)$$

где $a_i(x)$ - коэффициенты, $f(x)$ - правая часть уравнения.

Если коэффициенты в (24) постоянны, то уравнение называется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами (ЛДУПК).

Если правая часть в (24) равна 0, то уравнение - однородное (ОЛДУ).

Если и то и другое, то (24) носит гордое звание ОЛДУПК (однородное линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами).

У линейного уравнения с постоянными коэффициентами наблюдается одна особенность. Присмотритесь к выражению

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Получается, что после многократного дифференцирования и умножения на константу функция группируется со своими производными и сокращается до 0. Как так? Можете представить, что арктангенс, например, сократился со своей производной? Какая функция вообще на такое способна?

7.3.1 Структура общего решения ОЛДУПК 2-го порядка

Рассмотрим ОЛДУПК второго порядка:

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{25}$$

Допустим удалось найти два независимых решения (25): y_1 и y_2. Тогда общее решение (25) имеет вид

$$y_o = C_1 y_1 + C_2 y_2. \tag{26}$$

Доказательство. Убедимся, что линейная комбинация решений тоже решение. Подставим в уравнение и проверим. Сначала найдём все требуемые производные:

$$\begin{aligned} y_o &= C_1 y_1 + C_2 y_2, \\ y_o' &= C_1 y_1' + C_2 y_2', \\ y_o'' &= C_1 y_1'' + C_2 y_2''. \end{aligned}$$

Теперь подставим их в уравнение (25):

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + a(C_1 y_1' + C_2 y_2') + b(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$= C_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + C_2(y_2'' + ay_2' + by_2) = C_1 0 + C_2 0 = 0,$$

так как y_1 и y_2 решения (25), то выражения в скобках равны 0.

Осталось убедиться, что любое решение представимо в виде линейной комбинации двух известных. Эту часть доказательства, как наиболее трудоёмкую, примите на веру.

7.3.2 Поиск частных решений ОЛДУПК

Пусть дано уравнение (25). Мы можем записать его общее решение, зная два независимых частных решения. Но как найти хоть какое-нибудь частное решение? Ну вот $y = 0$, например - это решение всегда подойдёт к (25). Жаль, что 0 всегда и со всем линейно зависим. Достаточно очевидно, что на роль "функции, которая слишком похожа на себя после многократного дифференцирования"первый кандидат - экспонента. Может быть с каким-нибудь сомножителем в степени, для того, чтобы благополучно нейтрализовать все эти a и b в (25).

Итак, будем искать решение уравнения (25) в виде $y = e^{kx}$.

Подставим $y = e^{kx}$ в уравнение $y'' + ay' + by = 0$:

$$y = e^{kx},\ y' = ke^{kx},\ y'' = k^2e^{kx},$$

$$k^2e^{kx} + ake^{kx} + be^{kx} = 0.$$

Очевидно, что ненулевой сомножитель e^{kx} можно вынести за скобки и сократить. **Характеристическое уравнение** для (25) - это уравнение

$$k^2 + ak + b = 0. \tag{27}$$

Найдем корни (27): $k_{1,2}$. Следовательно, $y_1 = e^{k_1x},\ y_2 = e^{k_2x}$ - два частных решения (25), можно составить общее решение (26).

Рассмотрим уравнение (25) и решим его характеристическое уравнение (27) : $y'' + ay' + by = 0,\ k^2 + ak + b = 0$.

Возможны три случая :

1) корни (27) различные и действительные: $k_1 \neq k_2,\quad k_{1,2} \in \mathbb{R}$,
тогда получим два разных решения: $y_1 = e^{k_1x}$ и $y_2 = e^{k_2x}$;

2) корни (27) одинаковые: $k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R}$,
тогда получим только одно решение $y = e^{kx}$.

3) корни различные и комплЕксные: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$,
тогда получим два разных решения $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$.

В первом случае легко находится общее решение:

Теорема (D>0). Если корни $k_{1,2}$ характеристического уравнения $k^2+ak+b=0$ уравнения $y''+ay'+by=0$ вещественные и различные, то общее решение (26) имеет вид $y_o=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$, $C_{1,2}-const$

Рассмотрим второй случай.

Утверждение. Если характеристическое уравнение имеет корень кратности 2, то кроме $y_1=e^{kx}$ решением является $y_2=xe^{kx}$.

Доказательство: проверим, является ли $y=xe^{kx}$ решением.

$$y'=x'e^{kx}+x(e^{kx})'=e^{kx}+kxe^{kx},$$

$$y''=(e^{kx})'+kx'e^{kx}+kx(e^{kx})'=ke^{kx}+ke^{kx}+k^2xe^{kx}=2ke^{kx}+k^2xe^{kx}.$$

Подставим полученные выше производные в уравнение $y''+ay'+by=0$:

$$(2ke^{kx}+k^2xe^{kx})+a(e^{kx}+kxe^{kx}+b(xe^{kx})=0.$$

Разделим последнее уравнение на ненулевой сомножитель e^{kx} и сгруппируем:

$$2k+k^2x+a+akx+bx)=0,$$

$$2k+a+x(k^2+ak+b)=0.$$

$k^2+ak+b=0$ потому, что k корень этого уравнения. А $2k+a=0$ по теореме Виета (помните такую?).

Теорема (D=0). Если k - корень кратности 2 характеристического уравнения (27) уравнения (25), то общее решение (26) имеет вид $y_o=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}$, $C_{1,2}-const$

Если корни различные и комплЕксные: $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta\in\mathbb{C}$, то

$$y_o=C_1e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2e^{(\alpha-i\beta)x},$$

$$y_o=C_1e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(C_1e^{i\beta x}+C_2e^{-i\beta x}).$$

Применим формулу Эйлера $e^{iz}=\cos z+i\sin z$:

$$y_o=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+iC_1\sin\beta x+C_2\cos(-\beta x)+iC_2\sin(-\beta x)),$$

$$y_o=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+iC_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x-iC_2\sin\beta x),$$

$$y_o=e^{\alpha x}((C_1+C_2)\cos\beta x+i(C_1-C_2)\sin\beta x).$$

Теорема (D<0). Если характеристическое уравнение (27) уравнения (25) имеет комплексные корни $\alpha\pm i\beta$ вещественные и различные, то общее решение (26) имеет вид $y_o=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

7.3.3 Структура общего решения ОЛДУПК n-го порядка

Общее решение ОЛДУПК порядка n - линейная комбинация n его независимых решений. Действительно, если уравнение имеет больший порядок, то и его характеристическое уравнение имеет больше корней.

Частные решения по найденным корням составляются также, как и для случая второго порядка.

Для разных корней k_i - это решения $y_i = e^{k_i x}$.

Каждый вещественный корень k кратности r "порождает"r решений: $y_m = x^m e^{kx}$, $m = 1, ...(r-1)$.

Каждая пара комплексно-сопряженных корней порождает пару решений $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Если комплексно-сопряженные корни имеют кратность s, то решения, порожденные ими, имеют вид $(y_1)_m = x^m e^{\alpha x}\cos\beta x,\ (y_2)_m = x^m e^{\alpha x}\sin\beta x$, $m = 1, ...(s-1)$.

7.3.4 Дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Далее, **НЛДУПК** - неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Итак, мы умеем решать однородные уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \tag{28}$$

Ну как умеем... Если корни характеристического уравнения найдём, то решим. А это не всегда возможно. Но, допустим, удалось-таки найти общее решение однородного уравнения (28): $y_{o.o.}$.

Теперь попробуем решить неоднородное уравнение (НЛДУПК):

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \tag{29}$$

Теорема (о структуре общего решения НЛДУПК) . Общее решение неоднородного уравнения (29) состоит из суммы общего решения однородного (28) и частного решения неоднородного:

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}, \tag{30}$$

Найти решение (28) $y_{\text{о.о.}}$ относительно легко. Теперь остается понять, как найти частное решение (29) - $y_{\text{ч.н.}}$? Можно просто угадать. Но это не метод, а математика изучает именно методы. Можно обосновать как выглядит $y_{\text{ч.н.}}$, основываясь на уравнении и искать его, опираясь на этот вид. Правая часть уравнения - это то, что остается от y после дифференцирования и преобразования. Например, если правая часть уравнения - экспонента, то и частное решение содержит такую же экспоненту. Иначе как она появится после дифференцирования и сокращения? После дифференцирования и упрощения остаются "похожими на себя": экспонента, многочлен, синусы и косинусы. Причём, последние идут в комплекте, так как синус при дифференцировании переходит в косинус и наоборот.

Рассмотрим несколько типичных ситуаций.

Специальная правая часть - многочлен.

При дифференцировании многочлен остается многочленом, только степень его уменьшается с каждой производной.

Логично предположить, что частное решение уравнения, правая часть которого многочлен тоже надо искать в виде многочлена такой же степени. Искать многочлен, значит искать его коэффициенты.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = P_m(x),$$

$$y_{\text{ч.н.}} = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + ... + A_1 x + A_0.$$

Подставим, продифференцируем, сгруппируем и сравним коэффициенты при различных степенях в правой и левой половинах уравнения. Проще всего продемонстрировать метод на примере.

Пример. Решите уравнение $y'' + y' - 7y = 2x^2 + 5x - 1$.

$$y_{\text{ч.н.}} = Ax^2 + Bx - C,\ y'_{\text{ч.н.}} = 2Ax + B,\ y''_{\text{ч.н.}} = 2A,$$

$$2A + (2Ax + B) - 7(Ax^2 + Bx - C) = 2x^2 + 5x - 1,$$
$$-7A = 2,\quad 2A - 7B = 5,\quad 2A + B + 7C = -1.$$

Решаем методом Крамера, например. Не важно. Важно, что система линейная, определённая - решение есть всегда:

$$A = -\frac{2}{7},\quad B = -\frac{39}{49},\quad C = \frac{18}{343},$$

$$y_{\text{ч.н.}} = -\frac{2x^2}{7} - \frac{39x}{49} - \frac{18}{343}.$$

Если один из корней характеристического уравнения равен 0, то

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' = P_m(x).$$

Искать частное решение в этом случае следует в виде

$$y_{\text{ч.н.}} = x(A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + ... + A_1 x + A_0).$$

Если в уравнении отсутствуют (k) последних слагаемых

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-k} y^{(k)} = P_m(x),$$

то

$$y_{\text{ч.н.}} = x^k(A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + ... + A_1 x + A_0).$$

Рассмотрим этот случай на примере. **Пример.** Решите уравнение $y'' + y' = 2x^2 + 5x - 1$.

$$y_{\text{ч.н.}} = Ax^3 + Bx^2 + Cx, \quad y'_{\text{ч.н.}} = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y''_{\text{ч.н.}} = 6Ax + 2B,$$

$$6Ax + 2B + (3Ax^2 + 2Bx + C) = 2x^2 + 5x - 1,$$

$$3Ax^2 + x(6A + 2B) + 2B + C = 2x^2 + 5x - 1,$$

$$3A = 2, \quad 6A + 2B = 5, \quad 2B + C = -1,$$

$$A = \frac{2}{3}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -2,$$

$$y_{\text{ч.н.}} = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x,$$

Правая часть - экспонента

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = e^{Cx}, \quad y_{\text{ч.н.}} = Ae^{Cx}.$$

После подстановки, дифференцирования и сокращения ненулевого сомножителя e^{Cx} останется уравнение для A:

$$A(C^n + a_1 C^{n-1} + ... + a_{n-1} C + 1) = 1,$$

$$A = \frac{1}{C^n + a_1 C^{n-1} + ... + a_{n-1} C + 1}.$$

Пример 1. Решите уравнение $y'' + y' - 7y = e^{3x}$.

$$y_{\text{ч.н.}} = Ae^{3x},$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = 3Ae^{3x},$$
$$y''_{\text{ч.н.}} = 9Ae^{3x},$$
$$9Ae^{3x} + 3Ae^{3x} - 7Ae^{3x} = e^{3x} \;\Rightarrow\; 9A + 3A - 7A = 1,$$
$$5A = 1 \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{5}, \quad y_{\text{ч.н.}} = \frac{e^{3x}}{5}.$$

Пример 2. Решите уравнение $y'' - 9y = e^{3x}$.

$$y_{\text{ч.н.}} = Ae^{3x}, \;\; y'_{\text{ч.н.}} = 3Ae^{3x}, \;\; y''_{\text{ч.н.}} = 9Ae^{3x},$$

$$9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = e^{3x} \;\Rightarrow\; 0 = 1.$$

Так случается, если правая часть линейно зависит от одного из базовых решений однородного уравнения, соответствующего данному:

$$y'' - 9y = 0 \;\Rightarrow\; y_{o.o.} = \underline{C_1 e^{3x}} + C_2 e^{-3x}.$$

Частное решение в таком случае надо искать в виде $y_{\text{ч.н.}} = A \cdot x \cdot e^{3x}$.

Пример 3. Решите уравнение $y'' - 9y = e^{3x}$.

$$y_{\text{ч.н.}} = Axe^{3x},$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = 3xAe^{3x} + Ae^{3x},$$
$$y''_{\text{ч.н.}} = 9xAe^{3x} + 3Ae^{3x} + 3Ae^{3x} = 9xAe^{3x} + 6Ae^{3x},$$
$$9xAe^{3x} + 6Ae^{3x} - 9Axe^{3x} = e^{3x} \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{6} \;\Rightarrow\; y_{\text{ч.н.}} = \frac{xe^{3x}}{6}.$$

Правая часть содержит синус и/или косинус

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = R \sin Cx + Q \cos Cx,$$

тогда

$$y_{\text{ч.н.}} = A \sin Cx + B \cos Cx.$$

После подстановки, дифференцирования и группирования слагаемых с косинусом и синусом отдельно, получим уравнения для A, B.

Даже если изначально одна из тригонометрических функций в правой части отсутствовала, учесть в частном решении надо обе, так как синус и косинус регулярно превращаются друг в друга при дифференцировании.

Пример. Решите уравнение $y'' + y' - 7y = 2\sin 3x$.

$$y_{\text{ч.н.}} = A\sin 3x + B\cos 3x,$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x,$$
$$y''_{\text{ч.н.}} = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x,$$
$$-9A\sin 3x - 9B\cos 3x + 3A\cos 3x - 3B\sin 3x - 7A\sin 3x - 7B\cos 3x) = 2\sin 3x,$$
$$\sin 3x(-16A - 3B) + \cos 3x(3A - 16B) = 2\sin 3x,$$
$$-16A - 3B = 2, \quad 3A - 16B = 0, \quad A = \frac{32}{265}, \quad B = -\frac{6}{265},$$
$$y_{\text{ч.н.}} = \frac{32}{265}\sin 3x - \frac{6}{265}\cos 3x.$$

Замечание. Если $\sin Cx$ или $\cos Cx$ являются независимыми базовыми решениями, которые порождают общее решение однородного уравнения, то $y_{\text{ч.н.}} = x(A\sin Cx + B\cos Cx)$.

Правая часть - произведение экспоненты и многочлена

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = e^{kx}P_m(x),$$

тогда частное решение следует искать в виде произведения:

$$y_{\text{ч.н.}} = x^r e^{kx}(A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + ... + A_1 x + A_0),$$

где при совпадении коэффициента в степени экспоненты с корнем характеристического уравнения кратности r, следует добавить к частному решению соответствующий множитель.

Пример. Решите уравнение $y'' - 9y = e^{3x}(2x + 1)$.

$$y_{\text{о.о.}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x},$$

$$y_{\text{ч.н.}} = x(Ax + B)e^{3x} = (Ax^2 + Bx)e^{3x},$$
$$y'_{\text{ч.н.}} = (2Ax + B)e^{3x} + 3(Ax^2 + Bx)e^{3x},$$

$$y''_{\text{ч.н.}} = 2Ae^{3x} + 3(2Ax+B)e^{3x} + 3(2Ax+B)e^{3x} + 9(Ax^2+Bx)e^{3x},$$

$$2Ae^{3x}+3(2Ax+B)e^{3x}+3(2Ax+B)e^{3x}+9(Ax^2+Bx)e^{3x}-9x(Ax+B)e^{3x} = (Ax^2+Bx)e$$

$$2A+3(2Ax+B)+3(2Ax+B)+9(Ax^2+Bx)-9x(Ax+B) = e^{3x}(2x+1),$$

$$2A+3(2Ax+B)+3(2Ax+B)+9(Ax^2+Bx)-9x(Ax+B) = 2x+1,$$

$$12Ax + (2A+6B) = 2x+1,$$

$$12A = 2, \quad 2A+6B = 1,$$

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{9},$$

$$y_{\text{ч.н.}} = x(\frac{x}{6}+\frac{1}{9})e^{3x},$$

$$y_{\text{о.н.}} = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + x(\frac{x}{6}+\frac{1}{9})e^{3x}.$$

Правая часть - экспонента и косинус/синус

Пусть теперь правая часть является произведением экспоненты и линейной комбинации косинуса и синуса одного аргумента: $f(x) = e^{\alpha x}(P\cos\beta x + Q\sin\beta x)$,

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = e^{ax}(P\cos bx + Q\sin bx)$$

В процессе решения находим корни характеристического уравнения k_i (вещественные) и/или $\alpha_i \pm i\beta_i$ (мнимые), каждое с кратностью r_i.

Паре комплексных корней соответствуют два независимых решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$, которые формируют общее решение однородного.

Если правая часть произведение экспоненты и линейной комбинации косинуса и синуса, то и частное решение найдётся, если искать в виде произведения экспоненты на комбинацию синуса и косинуса (при совпадении $a \pm ib$ с парой комплексных корней характеристического уравнения кратности r, добавить к частному решению соответствующий множитель):

$$y_{\text{ч.н.}} = x^re^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x).$$

Пример. Решите уравнение $y'' + 9y = e^x\sin 2x$.

$$y_{\text{о.о.}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x,$$

$$y_{\text{ч.н.}} = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x),$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x),$$
$$y''_{\text{ч.н.}} = e^x((-4A - 3B)\sin 2x + (4B - 3A)\cos 2x),$$
$$-e^x((4A+3B)\sin 2x+(4B-3A)\cos 2x)+9e^x(A\cos 2x+B\sin 2x) = e^x\sin 2x,$$
$$-4A\sin 2x+4B\cos 2x-3A\cos 2x-3B\sin 2x+9A\cos 2x+9B\sin 2x = \sin 2x,$$
$$(-4A + 6B)\sin 2x + (4B + 6A)\cos 2x = \sin 2x,$$
$$-4A + 6B = 1, \quad 6A + 4B = 0,$$
$$A = -1/13, \quad B = 3/26,$$
$$y_{\text{ч.н.}} = -\frac{e^x}{13}\cos 2x + \frac{3e^x}{26}\sin 2x,$$
$$y_{\text{о.н.}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - \frac{e^x}{13}\cos 2x + \frac{3e^x}{26}\sin 2x.$$

Правая часть - многочлены и синус/косинус

Пусть теперь правая часть является комбинацией косинуса и синуса одного аргумента, при этом коэффициенты в комбинации не постоянные, а многочлены:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = P_t(x)\cos bx + Q_s(x)\sin bx.$$

Из-за того, что при дифференцировании тригонометрические функции переходят друг в друга, формируя вид искомого частного решения необходимо учесть, что многочлены-сомножители с неопределенными коэффициентами должны быть максимальной степени $m = \max\{t, s\}$. Если правая часть имеет вид $f(x) = P_t(x)\cos bx + Q_s(x)\sin bx$, то и частное решение найдётся, если искать в виде комбинации синуса и косинуса (при совпадении $\pm ib$ с парой комплексных корней характеристического уравнения кратности r, добавить к частному решению соответствующий множитель):

$$y_{\text{ч.н.}} = x^r(A_m(x)\cos\beta x + B_m(x)\sin\beta x), \quad m = \max\{t, s\}.$$

Пример 1. Решите уравнение $y'' + 9y = x\sin 2x + \cos 2x$.

$$y_{\text{о.о.}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x,$$

$$y_{\text{ч.н.}} = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x,$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = (C - 2Ax - 2B)\sin 2x + (A + 2Cx + 2D)\cos 2x,$$

$$y''_{\text{ч.н.}} = 2(2C - 2Ax - 2B)\cos 2x - 2(2A + 2Cx + 2D)\sin 2x,$$

$$2(2C - 2Ax - 2B)\cos 2x - 2(2A + 2Cx + 2D)\sin 2x +$$

$$+9((Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x) = x\sin 2x + \cos 2x,$$

$$(5Ax + (5B + 4C))\cos 2x + (5Cx + (5D - 4A))\sin 2x = x\sin 2x + \cos 2x,$$

$$5Ax + (5B + 4C) = 1, \quad 5Cx + (5D - 4A) = x,$$

$$5A = 0, \quad 5B + 4C = 1, \quad 5C = 1, \quad 5D - 4A = 0,$$

$$A = 0, \quad B = 0,04, \quad C = 0,2, \quad D = 0,$$

$$y_{\text{о.н.}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + 0,04\cos 2x + 0,2x\sin 2x.$$

Шпаргалка

НЛДУПК: $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$;

ОЛДУПК: $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$;

Структура решения НЛДУПК: $y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$.

Решение ОЛДУПК 2-го порядка:

1) $k_1 \neq k_2, \quad k_{1,2} \in \mathbb{R}$, тогда $y_{o.o} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$.

2) $k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R}$, тогда $y_{o.o} = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}$,

3) $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$, тогда $y_{o.o} = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

Структура частного решения НЛДУПК:

$f(x) = e^{\alpha x}(P_t(x)\cos bx + Q_s(x)\sin bx)$,

то $y_{\text{ч.н.}} = x^r e^{\alpha x}(A_m(x)\cos\beta x + B_m(x)\sin\beta x)$.

$\alpha \pm ib$ пара комплексных корней характеристического уравнения кратности r.

НЛДУПК: $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f_1(x) + f_2(x)$

$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{1,\text{ч.н.}} + y_{2,\text{ч.н.}}$.

7.4 Задания для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1) $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$;

2) $y' = e^{x+y}$;

3) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$;

4) $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$ (найдите частное решение);

5) $(1+x^2)y' = 2xy + (1+x^2)^2$;

6) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$;

7) $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$;

8) $y'' - 4y' = 0$;

9) $y'' - 6y' + 9y = 0$;

10) $y'' - 2y' + 2y = 2x$.

Ответы к заданиям. 1) $arctgy - arcsinx = C$; 2) $e^x + e^{\breve{}\,y} = C$; 3) $y = 2xarctgCx$; 4) $y = xe^{1-x}$; 5) $y = (x+C)(1+x^2)$; 6) $2y\cos x + \cos 2x = C$; 7) $y = \dfrac{1}{(1+x)(C+\ln|1+x|)}$; 8) $y = c_1e^{4x} + c_2$; 9) $y = e^{3x}(c_1 + c_2x)$; 10) $y = e^x(c_1\cos x + c_2\sin x) + x + 1$.

7.5 Вопросы для самопроверки к разделу 7

1. Как определяется дифференциальное уравнение первого порядка?

2. Что называется общим решением дифференциального уравнения первого порядка?

3. Что называется частным решением дифференциального уравнения первого порядка?

4. Как находится частное решение дифференциального уравнения первого порядка?

5. Как формулируется теорема существования и единственности решения (теорема Коши) для дифференциального уравнения первого порядка?

6. Как называются известные (изученные) типы дифференциальных уравнений первого порядка, их признаки и методы интегрирования.

7. Какой вид имеют линейные однородные и линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка?

8. Какую структуру имеет общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка?

9. Как формулируется теорема о сложении частных решений линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка? Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

10. По какому правилу находится характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

12. Какой вид имеет общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае действительных различных корней характеристического уравнения?

13. Какой вид имеет общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае равных корней характеристического уравнения?

14. Какой вид имеет общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения?

15. Как формулируется правило нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью в виде произведения многочлена на экспоненту?

16. Как формулируется правило нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью в виде произведения многочленов, тригонометрических функций и экспоненты?

8 Теория рядов

8.1 Числовые ряды. Признаки сходимости

8.1.1 Основные определения

Числовой ряд - это бесконечная сумма чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ..., \tag{31}$$

где слагаемые (31) - **члены ряда**, формула a_n - **общий член ряда**.

Частичная сумма S_n ряда (31) - это сумма первых n слагаемых ряда (31).

Ряд (31) **сходится**, если существует конечный предел последовательности частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Если предел S_n бесконечен или не существует, то ряд **расходится**.

Пример. Проанализировать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} = 2 + \frac{5}{2} + \frac{10}{3} + \frac{17}{4} + ...$$

Решение. Найдём предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} = \infty.$$

Из того, что a_n неограниченно возрастает следует, что S_n неограниченно возрастают. Следовательно ряд расходится.

8.1.2 Свойства числовых рядов

Числовые ряды вида (31) обладают следующими свойствами:

Свойство 1. Если убрать или добавить конечное число конечных членов ряда (слагаемых), то сходимость не изменится.

Свойство 2. Линейная комбинация конечного числа сходящихся рядов также является сходящимся рядом.

Свойство 3. Сумма или разность расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

Свойство 4. Сумма или разность сходящегося и расходящегося рядов является расходящимся рядом.

Свойства рядов следуют из свойств пределов.

Необходимое условие сходимости: общий член сходящегося ряда стремится к нулю.

Замечание. Необходимое условие сходимости является достаточным условием расходимости.

8.1.3 Знакоположительные ряды. Признаки сходимости

Если каждый член ряда (31) больше нуля, то ряд **знакоположительный**. Что логично.

Вы уже заметили, что расходимость ряда следует из того, что его слагаемые возрастают? Но иногда убывают, а ряд всё равно расходится. А иногда общий член ряда даже стремится к нулю, а ряд не сходится.

Примеры хорошо изученных рядов, которые мы будем далее использовать как эталонные

Пример 1. Ряд геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1,$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Пример 2. Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

https://www.desmos.com/calculator/meyuxdg08p

Пример 3. Обобщенный гармонический ряд - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, он сходится при $\alpha \geq 1$.

Неочевидность сходимости и невозможность в любой ситуации вычислить сумму наводят на мысль: может хоть по каким-нибудь признакам можно определить сходится ряд или нет?

Признаки сходимости знакоположительных рядов

Интегральный признак сходимости

Ряд $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ сходится одновременно интегралом $\int\limits_{k}^{\infty} f(x)dx$, где $f(n) = a_n$.

Признак сравнения

1) Если каждый член ряда $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ меньше соответствующего члена сходящегося ряда, то ряд сходится.

2) Если каждый член ряда $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ больше соответствующего члена расходящегося знакоположительного ряда, то ряд расходится.

Предельный признак сравнения

Ряды $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=k}^{\infty} b_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = C, \quad C = const$ сходятся/ расходятся одновременно.

Замечание. Сравнивают обычно с эталонными рядами: геометрическая прогрессия и гармонический ряд.

Итак, для сходимости ряда необходимо, чтобы общий член ряда убывал. Есть два замечательных признака, которые опираются на то насколько сильно (быстро) должны убывать члены ряда, чтобы он был сходящимся. Встречайте...

Признак Даламбера.

Ряд $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Если этот предел больше 1, то ряд расходится.

Радикальный признак Коши.

Ряд $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Если этот предел больше 1, то ряд расходится.

Признак Даламбера удобно использовать, когда общий член ряда содержит факториал. Радикальный - когда из общего члена ряда легко извлекается степень n. Если один из признаков выдаст “1“, когда вы его проверяете, то и другой столько же. Иначе не бывает.

8.2 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Ряд **знакочередующийся**, если он имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n, \quad a_n > 0. \tag{32}$$

Называется он так потому, что у него знаки чередуются: $a_0 - a_1 + a_2 - \ldots$. А если ряд не знакоположительный и знаки не чередуются, то он - **знакопеременный**.

Например, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n n = 0 - 1 + 2 - 3\ldots$ - знакочередующийся, а $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos\dfrac{\pi n}{6} = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} + 0 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \ldots$ - знакопеременный.

Если пристально всмотреться в знакочередующийся ряд, то очевидно, что:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n < \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ (вычитаем-прибавляем меньше, чем всё время прибавляем);

2) если a_n убывают, то сумма ряда всегда меньше, чем первое слагаемое (вычитаем из первого, потом прибавляем, но всегда меньше, чем вычли) .

Осознайте это. На этих двух очевидных фактах строится почти всё, что связано с приближенными вычислениями. А приближенные вычисления - это наше всё.

Пример 1. Исследуем сходимость гармонического ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots < 1.$$

Более того, $\underline{1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \ldots < \dfrac{5}{6}$.

И это не всё: $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \underline{\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \ldots} = \dfrac{7}{12} + \varepsilon, \quad \varepsilon < \dfrac{1}{5}$

Сумму знакочередующегося ряда (32) с убывающими (по абсолютной величине) слагаемыми, стремящимися к нулю, можно вычислить с точностью до любого знака после запятой. Тут надо радоваться. Я понимаю, что спать вам гораздо больше хочется, чем радоваться возможности точных вычислений, но...

Признак Лейбница. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n, \quad a_n > 0$ - сходится, если a_n, начиная с некоторого момента, монотонно стремится к нулю.

Схема исследования сходимости знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n, \quad a_n > 0:$$

шаг 1) проверяем условие $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$, если это верно, то шагаем на шаг 2, иначе - ряд расходится, исследование закончено;

шаг 2) проверяем условие $a_n < a_{n+1}, \ \forall n \geq N$, если оно выполняется, то ряд сходится, в противном случае - расходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n+1}{n^2+1}$.

Решение.

шаг 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n} = 0;$

шаг 2) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ убывает,

так как $f"(x) = \dfrac{-x^2-2x}{(x^2+1)^2} < 0, \quad x > 0.$

Ряд сходится.

Абсолютная и условная сходимость

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, причём **абсолютно**, если сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Если ряд сходится, но не абсолютно, то говорят, что он **сходится условно**.

Свойства сходящихся рядов.

1. Если ряды сходятся абсолютно, то их линейная комбинация сходится абсолютно.

2. Если один ряд сходится абсолютно, а другой — условно, то их линейная комбинация сходится условно.

3. Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него перестановкой членов, сходится абсолютно и имеет ту же сумму.

4. (Теорема Римана) Если ряд сходится условно, то можно так переставить члены, что сумма получившегося ряда будет равна любому, заранее заданному числу. Более того, можно так переставить члены ряда, что ряд будет расходиться.

8.3 Степенные ряды. Радиус сходимости

Функциональный ряд - это ряд, каждое слагаемое которого, является функцией:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + ... + a_n(x) + ... \tag{33}$$

При некоторых x ряд (33) сходится (это точки сходимости), а при некоторых - расходится.

Область сходимости функционального ряда (33) - это все значения x, при которых ряд сходится.

Степенной ряд - это функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_o)^n. \tag{34}$$

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке x_o, то он сходится абсолютно в интервале $-|x_o| < x < |x_o|$;

если степенной ряд (34) расходится в точке x_o, то он расходится при $|x| > |x_o|$.

Исследуем на абсолютную сходимость ряд (34) - рассмотрим ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x - x_o)^n|.$$

Используем признак Даламбера - найдём отношение следующего члена ряда к предыдущему и сравним с 1:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x - x_o)^{n+1}|}{|a_n(x - x_o)^n|} = |x - x_o| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l|x - x_o|.$$

Если $l|x-x_o|<1$ - то ряд сходится.

$$|x-x_o|<\frac{1}{l},$$

$$-\frac{1}{l}<x-x_o<\frac{1}{l},$$

$$x_o-\frac{1}{l}<x<x_o+\frac{1}{l}.$$

$(x_o-\frac{1}{l};x_o+\frac{1}{l})$ - область абсолютной сходимости ряда (34),
$R=\frac{1}{l}$ - **радиус сходимости** степенного ряда.

Свойства степенных рядов

1. Сумма степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости.

2. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости любое число раз.

3. Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому промежутку, принадлежащему интервалу сходимости ряда.

8.4 Ряд Тейлора. Разложение основных функций в степенной ряд

8.4.1 Ряд Тейлора

Пусть есть потребность производить действия с достаточно громоздкой, но при этом непрерывной и дифференцируемой функцией $f(x)$. Например, (о, ужас) необходимо её проинтегрировать. Оказывается есть безболезненный способ. Оказывается, можно представить её в виде степенного ряда:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_o)^n=a_o+a_1(x-x_o)+a_2(x-x_o)^2+...+a_n(x-x_o)^n+....$$

Почему это проще? Потому, что интегрировать степенную функцию очень просто. Осталось только придумать, какие у этого ряда должны быть коэффициенты. Оказывается, совсем не сложно их найти.

Если $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n$, то заметим, что

$$f(x_o) = a_o + a_1(x_o - x_o) + a_2(x_o - x_o)^2 + ... + a_n(x_o - x_o)^n + ... = a_o.$$

Если это выражение продифференцировать (а мы можем, есть такое свойство степенных рядов), то получим

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_o) + 3a_3(x - x_o)^2 + ... + na_n(x - x_o)^{n-1} + ...,$$

$$f'(x_o) = a_1 + 2a_2(x_o - x_o) + 3a_3(x_o - x_o)^2 + ... + na_n(x_o - x_o)^{n-1} + ... = a_1.$$

Следовательно, $a_o = f(x_o),\ \ a_1 = f'(x_o)$. Продолжим дифференцировать:

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_o) + ... + n \cdot (n - 1)a_n(x - x_o)^{n-2} + ...,$$

$$f''(x_o) = 2a_2, \quad a_2 = \frac{f''(x_o)}{2}.$$

При очередном дифференцировании к коэффициентам будет "прирастать"множитель:

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 + ... + n \cdot (n - 1)(n - 2)a_n(x - x_o)^{n-3} + ...,$$

$$f'''(x_o) = 3 \cdot 2a_3, \quad a_3 = \frac{f'''(x_o)}{3 \cdot 2}$$

Продолжая в том же духе получим коэффициент a_n.

Итак, функция $f(x)$ (непрерывная и дифференцируемая) в окрестности некоторой точки x_o, представима рядом Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^{\cdot}, \tag{35}$$

Иногда говорят "ряд Тейлора по степеням $(x - x_o)$".

Как и любой степенной ряд, он обладает областью сходимости, которая своя для каждой функции.

Ряд Тейлора в окрестности точки 0 называется **рядом Маклорена**.

8.4.2 Разложения некоторых функций в степенной ряд

1. Экспонента $f(x) = e^x$. У неё все производные одинаковые и равны e^x, значит

$$f(0) = f'(0) = ... = f^{(n)}(0) = 1;$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Проверим на абсолютную сходимость:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}n!|}{|(n+1)!x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

сходится всегда, $x \in \mathbb{R}$.

2. Синус $f(x) = \sin x$.

$f(0) = \sin 0 = 0,\ f'(0) = \cos 0 = 1,$

$f''(0) = -\sin 0 = 0,\ f''(0) = -\cos 0 = -1,$ ...

В значениях производных будут чередоваться значения: 0,1,0,-1,0,1,0,-1,... Подставим в формулу ряда Тейлора (35):

$$\sin x = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Проверим полученный ряд на абсолютную сходимость:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{2n+3}(2n+3)!|}{|(2n+1)!x^{2n+1}|} = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1$$

, сходится всегда, $x \in \mathbb{R}$.

3. Косинус $f(x) = \cos x$.

И, казалось бы всё заново... Но нет. Давайте продифференцируем ряд синуса:

$$\cos x = (\sin x)' = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + ... \right)' =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

При дифференцировании ряда область сходимости сохраняется.

4. Логарифм $f(x) = \ln(1 \pm x)$ и сумма геометрической прогрессии $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ тесно связаны. А именно,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

- это общеизвестно в узких кругах. Проинтегрируем это выражение:

$$\ln(1-x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1-x}dx = \int\limits_0^x (1 + x + x^2 + x^3 + ...)dx =$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Можно чуть-чуть знак поменять:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

$$\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1+x}dx = \int\limits_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + ...)dx =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Область сходимости, как известно, $|x| < 1$. Причём, у $\ln(1+x)$ наблюдается условная сходимость в точке $x = 1$.

5. Арктангенс так же можно получить из геометрической прогрессии :

$$\text{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n}.$$

8.4.3 Приближенные вычисления

С помощью разложения в степенной ряд можно вычислять значения функций приближенно. Прелесть в том, что используются только простейшие операции - арифметические. Для того, чтобы вычислить значение функции в неудобной для вычислений точке, её разлагают где-нибудь рядом, в "удобной"точке, в степенной ряд. Затем подставляют значение "неудобной"точки, получают числовой ряд, и, если он сходится, вычисляют значение функции, взяв несколько первых слагаемых этого ряда. Единственная проблема в том, чтобы оценить точность. Сколько слагаемых следует учесть?

Имеет место формула Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x - x_o)^k + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ - **остаток ряда**.

Если полученный ряд - знакочередующийся, то остаток ряда не превышает первого слагаемого этого остатка (отнимаем-прибавляем, каждый раз всё меньше и меньше, помните это было в 8.2?).

А вот если он знакоположительный? По чуть-чуть и бесконечность можно набрать. В этом случае остаток можно оценить, используя формулу остаточного члена ряда:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n,$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_o)^{n+1}, \quad c \in (x_o, x)$$

- **остаточный член ряда в форме Лагранжа**.

Пример 1. Вычислить $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ с точностью до 0,001.

Решение. Используем формулу разложения для экспоненты, вычислим значение при $x = -0.5$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...,$$

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-0,5} = 1 - 0,5 + \frac{0,25}{2} - \frac{0,125}{6} + \frac{0,0625}{24} - \frac{0,03125}{120} + ...,$$

$$\frac{0,0625}{24} > 0,001, \quad \frac{0,03125}{120} < 0,001,$$

следовательно остаток ряда, начиная с шестого слагаемого не превышает 0,001.

Для достижения точности 0,001 достаточно взять первые пять слагаемых:

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-0,5} = 1 - 0,5 + \frac{0,25}{2} - \frac{0,125}{6} + \frac{0,0625}{24} \approx 0,60677$$

Пример 2. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью до 0,001.

Решение. Используем формулу разложения для экспоненты, вычислим значение при $x = 0.5$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...,$$

$$\sqrt{e} = e^{0,5} = 1 + 0,5 + \frac{0,25}{2} + \frac{0,125}{6} + \frac{0,0625}{24} + \frac{0,03125}{120} + ...,$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}0.5^{n+1}, \quad c \in (0, 0.5).$$

Выясним, когда $\dfrac{e^c}{(n+1)!}0.5^{n+1}$ меньше 0,001 на интервале $c \in (0, 0.5)$

Очевидно, что $e^c < e^{0,5} < 2$

$$\frac{e^c}{(n+1)!}0.5^{n+1} < \frac{2}{(n+1)!}0.5^{n+1} < 0,001$$

$1000 < (n+1)!2^n$.

Найдём наименьшее n при котором неравенство выполняется:

$n = 3$, $1000 < 24 \cdot 8$ -неверно; $n = 4$, $1000 < 120 \cdot 16$ -верно.

Для достижения точности 0,001 достаточно взять первые четыре слагаемых:

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{0,5} = 1 + 0,5 + \frac{0,25}{2} + \frac{0,125}{6} \approx 1,645.$$

8.5 Ряд Фурье

8.5.1 Тригонометрические ряды

Тригонометрический ряд - это ряд (34), слагаемые которого являются тригонометрическими функциями, а именно:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{36}$$

Теорема Дирихле. Пусть периодическая функция $f(x)$

1) $f(x)$ кусочно – непрерывна (имеет конечное число т. р. 1 рода);

2) $f(x)$ кусочно – монотонна.

Тогда $f(x)$ представима на этом отрезке в виде ряда Фурье (тригонометрического ряда (36)). Причём, в точках непрерывности ряд Фурье сходится к значению функции, а в точках разрыва к среднему между левосторонним и правосторонним пределами.

Формул будет много. И все общие. Я запишу разложения для каждого конкретного случая. А именно:

Случай 1. $f(x)$, заданная на отрезке $[-\pi, \pi]$, $T = 2\pi$.

Случай 2. $f(x)$, заданная на отрезке $[-l, l]$, $T = 2l$.

Случай 3. $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, $T = b - a$.

Случай 4. Неполные ряды Фурье (для чётной и нечётной).

Случай 5. $f(x)$ не является периодической и задана на $[0, l]$.

Случай 6. Ряд Фурье в комплексной форме.

интеграл Фурье и преобразование Фурье, теорема Котельникова.

8.5.2 Ряд Фурье для 2π периодических функций

Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-\pi, \pi]$, $T = 2\pi$ представима в виде **ряда Фурье** (36):

$$f(x) \approx S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \tag{37}$$

Вывод формул коэффициентов (37). Найдём коэффициент a_n.

Умножим $f(x)$ на $\cos kx$, проинтегрируем и преобразуем:

$$f(x) \cdot \cos kx = \frac{a_0}{2} \cdot \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \cos kx + b_n \sin nx \cdot \cos kx).$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx dx + b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2}\cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx dx + b_n\cdot 0\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(k-n)x+\cos(k+n)x}{2}dx = a_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(k-k)x}{2} = a_k\pi.$$

Аналогично для b_n: умножим $f(x)$ на $\sin kx$, проинтегрируем...

$$f(x)\cdot\sin kx = \frac{a_0}{2}\cdot\sin kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cdot\sin kx + b_n\sin nx\cdot\sin kx)$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx dx + b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx dx\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(k-n)x-\cos(k+n)x}{2}dx = b_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(k-k)x}{2} = b_k\pi.$$

И, наконец,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right) = a_0\pi.$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \le x \le 0 \\ 2x & 0 \le x \le \pi \end{cases},$$

где $T = 2\pi$.

Решение. Изобразим функцию на рисунке 17. Вычислим коэффициенты ряда:

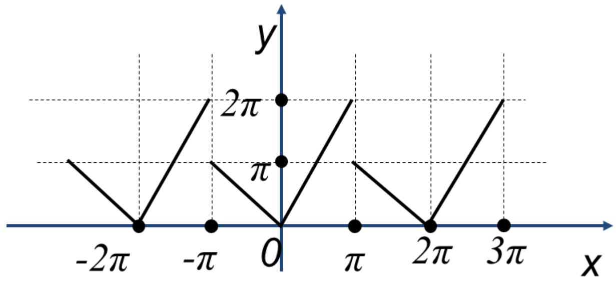

Рисунок 17 - График функции из примера 1

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{-1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} x\ dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} 2x\ dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-x^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{0} + x^2\Big|_0^{\pi} \right) = \frac{3\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} x\cos nx\ dx + \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\cos nx\ dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{-1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos(-\pi n)}{n^2} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos\pi n}{n^2} - \frac{2}{\pi n^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{3}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} -x\sin nx\ dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} 2x\sin nx\ dx =$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} x\sin nx\ dx + \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin nx\ dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Bigg|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}(-1)^n\right) + \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Запишем разложение в ряд:

$$f(x) \approx \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi\ n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right).$$

Итак,

$$\begin{cases} -x, & x \in (-\pi; 0) \\ 2x, & x \in (0; \pi) \end{cases} \approx \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3\left((-1)^n - 1\right)}{\pi\ n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right).$$

На рисунках 18 и 19 представлены графики некоторых частичных сумм ряда.

$$S_1 = \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\cos x + \sin x$$

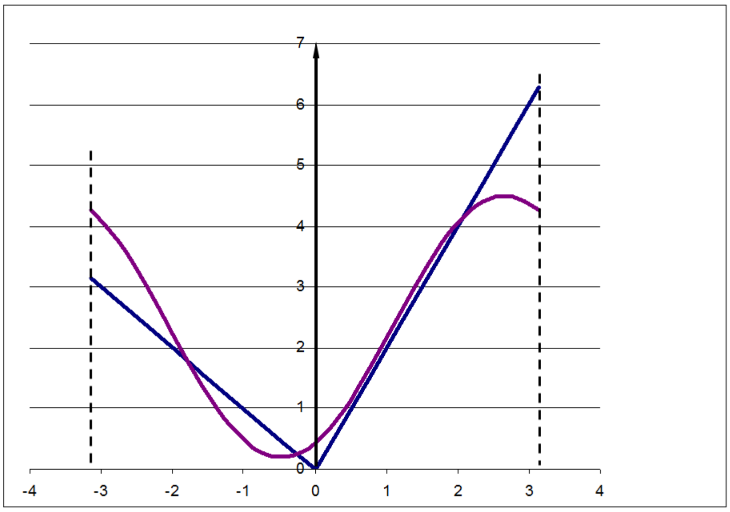

Рисунок 18 - Первая частичная сумма из примера 1

$$S_3 = \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{3\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x$$

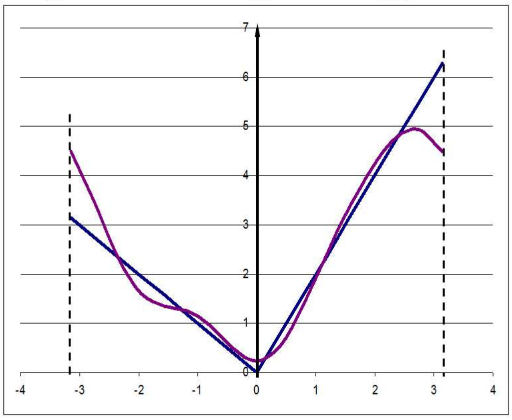

Рисунок 19 - Третья частичная сумма из примера 1

8.5.3 Ряд Фурье для функции, заданной на интервале $[-l;l]$

Периодическая функция $f(x)$, задана на отрезке $[-l,l]$, $T=2l$. Тогда

$$f(x)\approx S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\Big),$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx,\ \ a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ \ b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Введем новую 2π периодическую функцию

$$\varphi(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right),\ \ t=\frac{\pi x}{l},$$

$$f(x)=\varphi(t)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)=$$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\Big),$$

Проведём замену в коэфф-тах:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)d\frac{\pi x}{l}=\begin{bmatrix}-\pi\le t\le\pi\\-l\le x\le l\end{bmatrix}=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx,$$

И, аналогично,

$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx/$$

8.5.4 Ряд Фурье для функции, заданной на интервале $[a;b]$

Периодическая функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a,b]$, $T=b-a$. Тогда

$$f(x)\approx S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{b-a}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{b-a}\right),$$

где

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx,\ a_n = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\cos\frac{2\pi nx}{b-a}dx,$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\sin\frac{2\pi nx}{b-a}dx.$$

Замечание. Определенный интеграл от периодической функции на интервале, длиной в период не зависит от места расположения этого интервала (Рисунок 20).

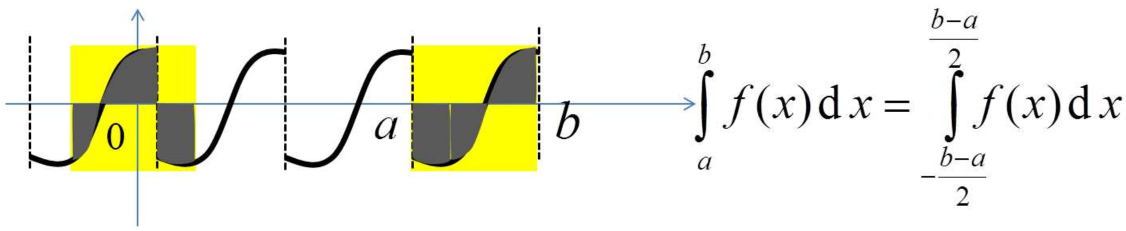

Рисунок 20 - Независимость от участка интегрирования

8.5.5 Неполные ряды Фурье

При разложении в ряд Фурье чётной или нечётной функции в процессе вычисления коэффициентов следует учитывать чётность и нечётность подынтегральных выражений.

При разложении в ряд Фурье чётной функции получим, что

$$b_n = 0,\ a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)dx,\ a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi nx}{l}.$$

При разложении в ряд Фурье нечётной функции получим, что

$$a_0 = a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$$f(x) \approx S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Замечание. Определенный интеграл от нечетной функции на интервале, длиной в период равен нулю, а от чётной функции - удвоенному интегралу по интервалу длиной в полупериод.

8.5.6 Ряд Фурье для функции, заданной на интервале $[0; l]$

Пусть функция $f(x)$ задана только на отрезке $[0, l]$.

Разложить её в ряд Фурье, который сходится к $f(x)$ на заданном интервале. можно бесконечным числом способов. Самый рациональный способ - доопределить её на $[-l, 0]$ чётным или нечётным образом и получить разложение **по косинусам** или **по синусам**, соответственно.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, $x \in [0; 1]$

- "по синусам":

$$f(x) \approx 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}, \quad T = 2, \; f(-x) = -f(x)$$

- "по косинусам":

$$f(x) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}, \quad T = 2, \; f(-x) = f(x)$$

- полагая $T = 1$:

$$f(x) \approx \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}.$$

8.5.7 Ряд Фурье в комплексной форме

Пусть функция представлена рядом Фурье:

$$f(x) \approx J(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega(t-x)}dt.$$

Используем формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

получим

$$\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}=\cos\varphi, \quad \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}=i\frac{e^{-i\varphi}-e^{i\varphi}}{2}=\sin\varphi,$$

Тогда **ряд Фурье в комплексной форме**:

$$f(x)\approx S(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\dfrac{\pi n x}{l}},$$

где

$$c_n=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-i\dfrac{\pi n x}{l}}dx, \ n\in\mathbb{Z}.$$

или

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}, \ \ c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}, \ n\in\mathbb{N}.$$

8.6 Интеграл и преобразование Фурье

8.6.1 Интеграл Фурье

Пусть $f(x)$ – определена на $-\infty,\infty)$, удовлетворяет условиям теоремы Дирихле на любом промежутке $[-l,l]$. И пусть интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ сходится, тогда имеет место **формула Фурье**:

$$f(x)\approx J(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}(A(\omega)\cos\omega\,x+B(\omega)\sin\omega\,x)\,d\omega,$$

где

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega\,tdt, \ B(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega\,tdt.$$

Или так:

$$f(x)\approx J(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(t-x)dt,$$

$J(x)$ - **интеграл Фурье**.

8.6.2 Преобразование Фурье

Интеграл Фурье в комплексной форме имеет вид

$$f(x) \approx J(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega(t-x)} dt.$$

Обозначим $C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$,

тогда $f(x) \approx J(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega x} d\omega$.

Приняты следующие обозначения:

$F\left(f(x)\right) = C(\omega)$ - **преобразование Фурье функции** $f(x)$;

$J\left(C(\omega)\right) = f(x)$ - **обратное преобразование Фурье**.

Свойства преобразования Фурье.

Линейность: $af(t) + bg(t) \xrightarrow{\Phi} aF(\omega) + bG(\omega)$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(af(t) + bg\ (t)\right) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt + \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

Подобие: $f(\alpha t) \xrightarrow{\Phi} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right),\ \alpha \neq 0$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t) e^{-i\frac{\omega}{\alpha}\alpha t} d\alpha t =$$

$$= \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\frac{\omega}{\alpha}u} du = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Запаздывание: $f(t + \Delta t) \xrightarrow{\Phi} e^{-i\Delta t\omega} F\left(\omega\right)$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t + \Delta t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t + \Delta t) e^{-i\omega\,(t+\Delta t)} e^{i\omega\,\Delta t} d\left(t + \Delta t\right) =$$

$$= e^{i\omega\,\Delta t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega\,u}du = e^{i\omega\,\Delta t}F(\omega)$$

Затухание (смещение): $e^{ict}f(t)\xrightarrow{\Phi}F\left(\omega+c\right)$.

$$e^{ic\,t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega\,t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega\,t+ic\,t}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(\omega-c)\,t}dt = F(\omega-c)$$

Дифференцирование образа: $(it)^n f(t)\xrightarrow{\Phi}F^{(n)}\left(\omega\right)$.

Дифференцирование оригинала: $f^{(n)}(t)\xrightarrow{\Phi}\left(i\omega\right)^n F\left(\omega\right)$.

Свёртка: $f(\,t)*g\ (t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\xrightarrow{\Phi}F(\omega)\cdot G\left(\omega\right)$.

8.6.3 Теорема Котельникова.

Любую функцию (сигнал), состоящую из частот от 0 до $\omega_{\max}$ периодов в секунду можно представить рядом

$$f\left(t\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\Delta t\right)\frac{\sin\dfrac{\pi\left(t-n\Delta t\right)}{\Delta t}}{\dfrac{\pi\left(t-n\Delta t\right)}{\Delta t}},\text{ где }\Delta t=\frac{1}{2\omega_0}\le\frac{1}{2\omega_{\max}}.$$

Любую функцию f(t), состоящую из частот от 0 до $\omega_{\max}$, можно непрерывно передавать с любой точностью при помощи чисел, передаваемых друг за другом через $\Delta t=\dfrac{1}{2\omega_{\max}}$ секунд.

8.7 Задания для самостоятельного решения

Исследовать на сходимость по признаку Даламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+5}{2^n}$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n n!}{n^n}$.

Исследовать на сходимость по радикальному признаку Коши:

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Исследовать на сходимость по признаку сравнения:

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$.

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^5+3}$.

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n-1}$.

10) Найдите область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{3n-1}}{8^{n+1}n\ln^3 n}$.

Ответы к заданиям. 1) Сходится; 2) Сходится; 3) Сходится; 4) Расходится; 5) Сходится; 6) Расходится; 7) Сходится; 8) Сходится; 9) Расходится; 10) $[-2;2]$.

8.8 Вопросы для самопроверки к разделу 8

1. Что называется числовым рядом?

2. Что называется частичной суммой числового ряда?

3. Какой числовой ряд называется сходящимся и какой расходящимся?

4. Как формулируется необходимое условие сходимости числового ряда?

5. Как формулируется достаточный признак расходимости числового ряда?

6. Как формулируются признаки сходимости и расходимости числовых рядов с положительными членами, основанные на сравнении?

7. Как формулируется признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами?

8. Как формулируется радикальный признак Коши сходимости рядов с положительными членами?

9. Как формулируется интегральный признак Коши сходимости рядов с положительными членами?

10. Как формулируется признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда?

11. Как определяется абсолютно сходящийся и условно сходящийся числовой ряд?

12. Как формулируется достаточный признак сходимости числового ряда, основанный на абсолютной сходимости ряда?

13. Какими свойствами обладают абсолютно сходящиеся ряды?

14. Как определяется степенной ряд?

15. Как формулируется теорема Абеля о сходимости и расходимости степенного ряда?

16. Как определяется радиус сходимости степенного ряда?

17. Что называется гармоникой (гармоническим колебанием)?

18. Какой ряд называется тригонометрическим?

19. Какой ряд называется рядом Фурье?

20. Как выглядит ряд Фурье для четной и для нечетной функции?

9 Теория функций комплексной переменной

9.1 Комплексные числа. Функции комплексного аргумента

9.1.1 Комплексные числа и действия над ними

Комплексное число — это упорядоченная пара $z = (x, y),\ x, y \in \mathbb{R}$. Комплексному числу соответствует точка на плоскости с координатами (x, y) (Рисунок 21).

Далее будем использовать обозначения:
$x = \mathrm{Re}z$ — **действительная часть** числа,
$y = \mathrm{Im}z$ - **мнимая часть** числа;
$\mathbb{C} = \{(x, y)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ — **комплексная плоскость**;
Ox, $\mathrm{Re}z$ — **действительная ось**,
Oy, $\mathrm{Im}z$ - **мнимая ось** ;

$\bar{z} = (x, -y)$ — это число **сопряженное** числу $z = (x, y)$.

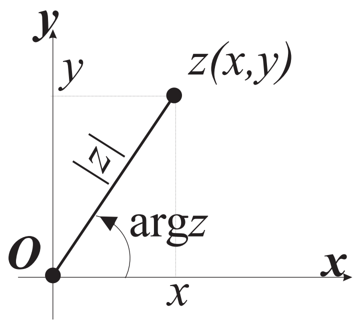

Рисунок 21 - Геометрическое представление комплексного числа

Модуль $|z|$ комплексного числа z — это длина радиус-вектора точки $z = (x, y)$ (Рисунок 21). Модуль комплексного числа вычисляется по формуле

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{38}$$

Аргумент $\arg z$, φ комплексного числа z — это угол между радиус-вектором точки (x, y) и действительной осью (Рисунок 21),

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\frac{y}{x}, \quad x > 0,\ y \geq 0 \\ \pi + \mathrm{arctg}\frac{y}{x}, \quad x < 0 \\ 2\pi + \mathrm{arctg}\frac{y}{x}, \quad x > 0,\ y \leq 0 \\ \frac{\pi}{2},\ x = 0,\ y > 0 \\ \frac{3\pi}{2},\ x = 0,\ y < 0 \end{cases} \tag{39}$$

Обычно $0 \leq \arg z < 2\pi$, хотя иногда для измерения аргумента удобно использовать интервал $-\pi < \arg z \leq \pi$, тогда и формулы (39) немного меняются. Главное помните, что более, чем странно измерять угол несколькими оборотами, например указывать 725^o вместо 5^o, и так же странно указывать угол -195^o вместо 175^o.

Далее вам встретится функция $w = \mathrm{Arg}z = \arg z + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, она многозначна и $\arg z$ является её *главным значением.*

9.1.2 Формы записи комплексного числа

Число $i = (0, 1)$ называется **мнимая единица**. Далее будет показано, что квадрат этого числа равен -1. Произвольное комплексное число принято представлять в трёх формах записи:

- **алгебраическая:** $z = x + iy$;

• **тригонометрическая:** $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

• **показательная:** $z = |z|e^{i\varphi}$.

Имеет место **формула Эйлера:**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{40}$$

которая вытекает из разложения экспоненты и синуса/косинуса в ряд:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!}...,$$

$$\sin\varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!}...,$$

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{i^2\varphi^2}{2!} + \frac{i^3\varphi^3}{3!} + \frac{i^4\varphi^4}{4!} + \frac{i^5\varphi^5}{5!}... = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Пример. Запишите мнимую единицу в различных формах.

$$z = (0,1) = 0 + 1\cdot i = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}};$$

$$i^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

9.1.3 Действия над комплексными числами

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$, $z_2 = x_2 + iy_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$, над этими числами можно производить все знакомые по действительным числам действия.

• **Сложение.** $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$.

• **Умножение.** $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

• **Деление.** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

• **Возведение в степень:** $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$ (формула Муавра).

• **Извлечение корня**: $(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad k = \overline{0, n-1}$.

Замечание 1. Корень степени n имеет n различных значений. Точки $\sqrt[n]{z}$ — вершины правильного n – угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Замечание 2. $\sqrt{-1} = \pm i$.

Пример. Вычислить $\dfrac{(1 - i\sqrt{3})^{10} i^7}{(2 + 2i)^{14}}$.

Решение. Изобразим числа-сомножители на комплексной плоскости (Рисунок 22).

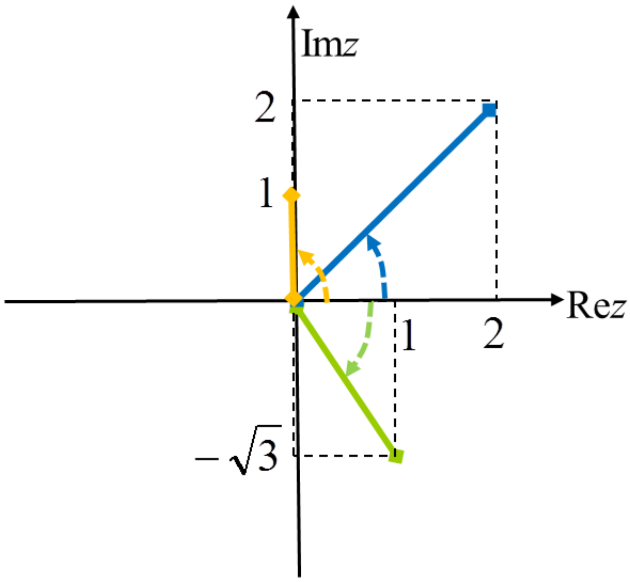

Рисунок 22 - Иллюстрация к примеру

Переведём все сомножители в показательную форму и выполним действия:

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}},$$

$$(1 - i\sqrt{3})^{10} = (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^{10} = 2^{10}e^{-i\frac{10\pi}{3}} = 2^{10}e^{i\frac{2\pi}{3}};$$

$$i^7 = (e^{i\frac{\pi}{2}})^7 = e^{i\frac{7\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}};$$

$$(1 - i\sqrt{3})^{10}i^7 = 2^{10}e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2^{10}e^{i(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2})} = 2^{10}e^{i\frac{\pi}{6}};$$

$$(2 + 2i)^{14} = (\sqrt{4+4}e^{i\,\mathrm{arctg}\,1})^{14} = (\sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}})^{14} = 2^{21}e^{i\frac{7\pi}{2}} = 2^{21}e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

$$\frac{2^{10}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2^{21}e^{-i\frac{\pi}{2}}} = 2^{-11}e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})} = 2^{-11}e^{-i\frac{20\pi}{6}} = 2^{-11}e^{-i\frac{10\pi}{3}} =$$

$$= 2^{-11}e^{i\frac{4\pi}{6}} = 2^{-11}e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Ответ: $2^{-11}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

9.1.4 Линии и области в комплексной плоскости

Последовательность комплексных чисел: z_1, z_2, ..., z_n, ... **неограниченно возрастающая**, если начиная с некоторого N, для всех $n > N$ выполняется условие $|z_n| > R$ для любого $R > 0$.

Бесконечно удаленная точка $z = \infty$ — предел всякой неограниченно возрастающей последовательности. Точка $z = \infty$ имеет вид $z = |z|e^{i\varphi}$, где $|z| = \infty$, φ не определен.

Расширенная комплексная плоскость — $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}_+$.

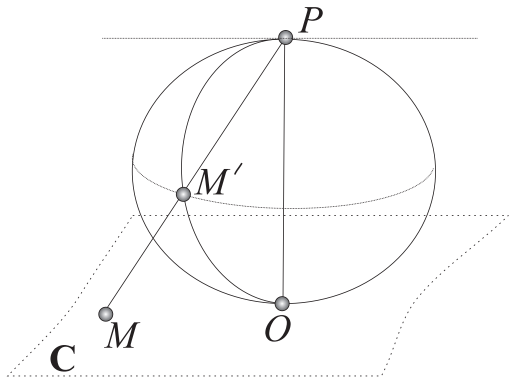

Рисунок 23 - Сфера Римана

Между точками $\mathbb{C}_+$ и точками сферы можно установить взаимно - однозначное соответствие. Точка O соответствует сама себе, любой точке сферы M' соответствует $M \in \mathbb{C}$, лежащая на прямой PM', а точке P соответствует $z = \infty$. Иллюстрируется это соответствие с помощью **сферы Римана** (Рисунок 23.).

Для классификации областей расширенной комплексной плоскости нам понадобится одно ключевое определение: **δ-окрестность** точки z_0 — множество точек z, $|z - z_0| < \delta$.

Окрестность бесконечно удаленной точки — множество точек z таких, что $|z| > R$.

Различают следующие виды областей:

N-связная область — область, ограниченная N замкнутыми не пересекающимися и не самопересекающимися линиями.

Граничная точка области — точка, любая δ-окрестность которой содержит как точки области, так и точки, не входящие в область.

Граница области — множество граничных точек.

Замкнутая область — область, которая содержит все свои граничные точки.

Внутренняя точка области — точка, которая входит в данную область вместе с некоторой окрестностью.

Ограниченная область — область, целиком лежащая внутри некоторого круга с постоянным радиусом.

9.1.5 Функции комплексного переменного

Функция комплексного переменного (ФКП) $w = f(z)$ — правило по которому некоторой точке $z \in \mathbb{C}$ ставится в соответствие одна (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) точек $w \in \mathbb{C}$.

Функцию записывают либо в виде $w = f(z)$, либо в виде суммы действительной и мнимой частей, которые являются действительными функциями от двух действительных переменных, где:

$w = u(x, y) + iv(x, y)$, где $z = x + iy$ — аргумент ФКП,

$u(x, y)$ — **действительная часть функции**,

$v(x, y)$ — **мнимая часть функции**.

Пример. Найдите вещественную и мнимую части функции $w = z^2$.

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + i \cdot \underbrace{2xy}_{v}$$

9.2 Вычисление ФКП

Показательная функция $w = e^z$.

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y;$$

$\mathrm{Re}w = u(x, y) = e^x \cos y, \quad \mathrm{Im}w = v(x, y) = e^x \sin y.$

Свойства:

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

2. $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 \cdot z_2}$.

3. Новое свойство. Показательная ФКП является периодической с периодом $2\pi i$:

$$e^{z+2k\pi i} = e^z, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Логарифмическая функция $w = \mathrm{Ln}z$.

Обратная к показательной, не определена при $z = 0$.

$$z = e^w \Rightarrow \begin{vmatrix} z = x + iy \\ w = u + iv \end{vmatrix} \Rightarrow x + iy = e^{u+iv} \Rightarrow x + iy = e^u e^{iv};$$

$$x + iy = e^u (\cos v + i \sin v) = \underbrace{e^u \cos v}_{x} + i \underbrace{e^u \sin v}_{y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = e^u \cos v, \\ y = e^u \sin v, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = tgv, \\ x^2 + y^2 = (e^u)^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = arctg\frac{y}{x} = \arg z, \\ u = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \ln|z|; \end{cases}$$

$$\mathrm{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z},$$

$\ln z = \ln|z| + i\arg z$ – **главное значение** логарифма;

Причём, $\mathrm{Re} w = u(x,y) = \ln|z|,\quad \mathrm{Im} w = v(x,y) = \arg z + 2\pi k.$

Новое свойство. Логарифмическая функция многозначна:

$$\mathrm{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Степенная функция $w = z^a,\quad a \in \mathbb{C}$,

определена для $z \neq 0$.

Вычисление степенной функции осуществляется по формуле

$$w = z^a = e^{a \mathrm{Ln} z}.$$

Новое свойство. Степенная ФКП многозначна.

Замечание. При логарифмировании показательной функции следует учитывать не только многозначность логарифмической функции, но и периодичность показательной:

$$\mathrm{Ln} z^a = \mathrm{Ln} e^{a\mathrm{Ln} z} = \mathrm{Ln} e^{a \mathrm{Ln} z + 2k\pi i} = a \cdot \mathrm{Ln} z + 2k\pi i,\quad a \in \mathbb{C},\quad n, k \in \mathbb{Z}$$

Пример 1. Вычислить значение выражения $(1-3i)^i$.

$$(1-3i)^i = e^{Ln(1-3i)^i} = e^{iLn(1-3i)} = e^{i(\ln\sqrt{10} + i(-\mathrm{arctg}3 + 2\pi k))} =$$

$$= e^{i(\ln\sqrt{10} - i\mathrm{arctg}3 + 2\pi k i)} = e^{i\ln\sqrt{10} + \mathrm{arctg}3 - 2\pi k} =$$

$$= e^{\mathrm{arctg}3 - 2\pi k}(\cos\ln\sqrt{10} + i\sin\ln\sqrt{10}).$$

Тригонометрические функции

$$w = \cos z,\ w = \sin z,\ w = \mathrm{tg} z,\ w = \mathrm{ctg} z.$$

Определены на всей плоскости, периодические.

Новое свойство: $|\sin z|$ и $|\cos z|$ могут быть больше 1.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \mathrm{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Гиперболические функции

$$w = \operatorname{ch} z,\ w = \operatorname{sh} z,\ w = \operatorname{th} z,\ w = \operatorname{cth} z.$$

Определены на всей плоскости, периодические.

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\ \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z,\ \operatorname{ch} iz = \cos z,\ \sin iz = i \operatorname{sh} z,\ \cos iz = \operatorname{ch} z. \qquad (41)$$

Пример 2. Вычислить значение выражения $\sin(1 - 3i)$.

$$\sin(1 - 3i) = \sin 1 \cos 3i - \cos 1 \sin 3i = \sin 1 \cdot \operatorname{ch} 3 - i \cos 1 \operatorname{sh} 3.$$

Обратные тригонометрические функции

$$w = \mathrm{Arccos} z,\ w = \mathrm{Arcsin} z,\ w = \mathrm{Arctg} z,\ w = \mathrm{Arcctg} z.$$

Вывод формулы для арктангенса:

$$z = \mathrm{tg} w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})},$$

$$iz(e^{iw} + e^{-iw}) = e^{iw} - e^{-iw},$$

$$(iz - 1)e^{iw} + (iz + 1)e^{-iw} = 0 \quad \Big| \cdot e^{iw},$$

$$(iz - 1)e^{2iw} + (iz + 1) = 0,$$

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

$$w = \frac{1}{2i} \mathrm{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz} = -\frac{i}{2} \mathrm{Ln} \frac{i - z}{i + z},$$

$$\mathrm{Arctg} z = -\frac{i}{2} \cdot \mathrm{Ln} \frac{i - z}{i + z},\ \mathrm{Arcctg} z = \frac{i}{2} \cdot \mathrm{Ln} \frac{z - i}{z + i}.$$

$$\mathrm{Arccos} z = -i \,\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),\ \mathrm{Arcsin} z = -i \,\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

9.3 Непрерывность и предел ФКП

Предел функции комплексного переменного $w = f(z)$ при $z \to z_o$ — комплексное число $w_o = u_o + iv_o$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая δ-окрестность точки z_o, что для всех точек z этой окрестности (кроме, может быть самой точки z_o) выполняется неравенство: $|f(z) - w_o| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = w_o$.

Предел функции комплексного переменного можно определить через пределы действительной и мнимой части. Тогда

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = \lim_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} (u_o(x,y) + iv_o(x,y)) = w_o = u_o + iv_o,$$

$$\text{где} \quad \lim_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} u(x,y) = u_o, \qquad \lim_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} v(x,y) = v_o.$$

Свойства предела ФКП такие же, как и свойства предела функции действительного переменного:

1. Линейность. Предел линейной комбинации ФКП равен линейной комбинации пределов.

2. Предел произведения ФКП равен произведению пределов.

3. Предел частного ФКП равен частному пределов, при условии, что предел знаменателя не равен нулю.

Функция $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0, если она определена в этой точке и некоторой ее δ-окрестности и предел $\lim\limits_{|z - z_0| \to 0} f(z)$ существует и равен значению функции в этой точке.

Функция непрерывна в некоторой области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Свойства непрерывных ФКП. Из непрерывности функции комплексного переменногого следует непрерывность ее действительной и мнимой частей (как функций от двух действительных переменных) и наоборот. Следовательно, для непрерывной функции комплексного переменного характерны те же свойства, что и для непрерывных функций двух действительных переменных. А именно: из непрерывности ФКП следует непрерывность их суммы, произведения, частного (кроме деления на нуль) и сложной функции.

Теорема.Непрерывная кривая отображается с помощью непрерывной функции в непрерывную кривую.

9.4 Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Аналитические функции

9.4.1 Условия дифференцируемости

Производная функции $w = f(z)$ — это предел

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+ \triangle z) - f(z)}{\triangle z},$$

при $\triangle z \to 0$ по любому пути.

Для дифференцируемости функции необходимо выполнение **условий Коши – Римана:**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{42}$$

Доказательство. Найдём производную при стремлении к точке z по горизонтали. Когда к точке приближаются по горизонтали, то приращение по вертикали отсутствует, так?

$$\lim_{\Delta z \to 0 \Delta z = \Delta x + i\Delta y} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y = 0, \Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$

$$\lim_{\Delta y = 0, \Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta x) - f(z)}{\Delta x}$$

Теперь вспомним, что $f = u+iv$, а так же свойства предела и определение производной:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta x) - f(z)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+iy+\Delta x) + iv(x+iy+\Delta x) - u(x+iy) - iv(x+iy)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+iy+\Delta x) - u(x+iy)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+iy+\Delta x) - v(x+iy)}{\Delta x} =$$

$$= u'_x + iv'_x$$

Аналогично,

$$\lim_{\Delta z\to 0 \Delta z=\Delta x+i\Delta y}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\Delta y=0,\Delta x\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x=0,\Delta y\to 0}\frac{f(z+\Delta y)-f(z)}{i\Delta y}=$$

$$=\frac{1}{i}(u'_y+iv'_y)=v'_y-iu'_y$$

И то и другое производная, значит они должны совпадать. **Ч.Т.Д.**

Необходимое условие дифференцируемости. Если функция дифференцируема в точке, то для нее в этой точке выполняются условия Коши – Римана.

Достаточное условие дифференцируемости. Если в некоторой окрестности точки z_o действительная и мнимая части функции $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ дифференцируемы и выполняются условия Коши – Римана, то функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_o.

9.4.2 Вычисление производной ФКП

Для вычисления можно использовать любую из формул:

$$f'(z)=u'_x+iv'_x,\ f'(z)=u'_x-iu'_y,\ f'(z)=v'_y+iv'_x,\ f'(z)=v'_y-iu'_y.$$

ФКП является **аналитической в точке**, если она определена и дифференцируема в этой точке и в некоторой ее окрестности.

(!) Основные элементарные ФКП являются **аналитическими** на ОДЗ, поэтому остается в силе **таблица производных**.

Особая точка — точка, в которой функция не является аналитической.

Гармоническая функция — это функция двух действительных переменных, которая имеет непрерывные частные производные до второго порядка и *оператор Лапласа* от этой функции (сумма ч.п. 2 п.) равен нулю.

Теорема. Если функция аналитическая в некоторой области, то ее действительная и мнимая части в этой области являются гармоническими функциями.

9.4.3 Восстановление аналитической ФКП по ее действительной или мнимой части.

• Пусть известна только действительная часть ФКП.

• Проверим гармоничность: $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$. (**оператор Лапласа**)

• Используя первое условие Коши-Римана, составим д.у. для мнимой части:

$$v'_y = u'_x, \quad \int v'_y dy = \int u'_x dy, \quad v(x,y) = \int u'_x dy + C(x).$$

• Используя второе условие Коши-Римана, составим д.у. для $C(x)$:

$$v'_x = -u'_y, \quad \left(\int u'_x dy + C(x)\right)'_x = -u'_y, \quad C'_x(x) = -\left(\int u'_x u dy\right)'_x - u'_y.$$

• Интегрируя обе части последнего уравнения по x, найдем $C(x)$ с точностью до некоторой константы C_1.

• Мнимая часть: $v(x,y) = \int u'_x dy + C(x) + C_1$.

Аналогично восстанавливается и действительная часть по мнимой.

(!) Если заданы начальные условия $f(z_o) = w_o$, то функция восстанавливается полностью.

9.5 Интегрирование ФКП

Пусть $f(z)$ — непрерывная ф-я, определенная на кривой AB.

Разобьем AB на n частей: $A = z_0$, z_1, z_2, ..., $z_n = B$.

Выберем на каждой дуге $z_{i-1}z_i$ точку C_i, $\triangle\, z_i = z_i - z_{i-1}$.

Составим интегральную сумму: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(C_i)\cdot \triangle\, z_i$.

Интеграл от $f(z)$ по AB: $\int\limits_{AB} f(z)dz = \lim\limits_{\max\{|\triangle z_i|\}\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(C_i)\cdot \triangle\, z_i$.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_L |z|dz$, L — отрезок $y = 2x$, от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + 2i$.

$$z = x + iy = (1+2i)x,\ |z| = \sqrt{5}x,\ dz = (1+2i)dx.$$

$$I = \int\limits_0^1 \sqrt{5}x(1+2i)\,dx = \sqrt{5}(1+2i)\int\limits_0^1 xdx = \sqrt{5}(1+2i)\,\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}(1+2i).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}(1+2i)$.

9.5.1 Свойства интеграла от ФКП

1. Линейность. $\int\limits_{AB}(a_1f_1+\ldots+a_nf_n)dz = a_1\int\limits_{AB}f_1dz+\ldots+a_n\int\limits_{AB}f_ndz.$
2. Аддитивность. $\int\limits_{AB}fdz = \int\limits_{AC_1}fdz+\int\limits_{C_1C_2}fdz+\ldots+\int\limits_{C_nB}fdz,$

где $C_1,\ldots C_n$ — точки, разбивающие кривую.
3. $\int\limits_{AB}f(z)dz = -\int\limits_{BA}f(z)dz.$
4. Интеграл от ФКП по замкнутой кривой зависит только от направления обхода и не зависит от выбора начальной точки.

9.5.2 Вычисление интеграла от ФКП

Пусть кривая задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. Тогда: $z(t) = x(t) + iy(t)$, и

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AB} f(x(t)+iy(t))\,dz(t) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f^*(t)z'(t)\,dt.$$

9.5.3 Интегрирование аналитической ФКП

Теорема Коши. Интеграл от функции по замкнутому контуру, лежащему в области аналитичности этой функции, равен нулю.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z-i|=1}\frac{e^z}{z-2-3i}dz.$

Решение. $\int\limits_{|z-i|=1}\frac{e^z}{z-2-3i}dz = 0$, т.к. $2+3i \notin D_C$.

Следствие. Интеграл по кривой, лежащей в области аналитичности не зависит от вида кривой, а зависит только от начальной и конечной точек:

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz = \int\limits_{z_A}^{z_B} f(z)\,dz.$$

(!) Интегрирование аналитической функции производится с использованием формулы Ньютона-Лейбница

Теорема Коши для многосвязной области. Интеграл от аналитической функции по внешней границе n-связной области C_o равен сумме интегралов по внутренним границам $C_1, ..., C_n$:

$$\int\limits_{C_0} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k} f(z)\,dz.$$

9.5.4 Интегральная формула Коши

Пусть C — замкнутый контур, D_C - область внутри контура C, функция $f(z)$ аналитическая в области D_C, $z_0 \in D_C$ - некоторая точка. Тогда $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)$, (обход C против часовой стрелки).

Пример 1. Вычислить $\int\limits_{|z-i|=10} \frac{e^z}{z-2-3i}dz$.

$$\int\limits_{|z-i|=10} \frac{e^z}{z-2-3i}dz = 2\pi i e^{2+3i} = 2\pi e^2 e^{i(3-\frac{3\pi}{2})}.$$

Следствие. В условиях теоремы: $\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(z_0)$.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{|z-i|=10} \frac{e^z}{(z-2-3i)^3}dz$.

$$\int\limits_{|z-i|=10} \frac{e^z}{(z-2-3i)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}e^{2+3i} = \pi e^2 e^{i(3-\frac{3\pi}{2})}.$$

9.6 Ряды в комплексной плоскости. Ряд Лорана

9.6.1 Ряды в комплексной плоскости

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots$ некоторый ряд, $c_n = a_n + ib_n$.

Теорема. Числовой ряд с комплексными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды с действительными и мнимыми частями $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ряды в комплексной области обладают теми же свойствами, что и ряды с действительными членами.

Остается в силе теорема Абеля и разложения функций в ряд Тейлора.

Теорема о разложении функции в ряд Лорана. Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$, $(r \geq 0)$, тогда она единственным образом разлагается в этом кольце в степенной ряд как с положительными, так и с отрицательными степенями

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad n \in \mathbb{Z},$$

где C — некоторая окружность, лежащая внутри кольца $r < |z - z_0| < R$

Главная часть ряда Лорана: $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Правильная часть ряда Лорана: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

9.6.2 Особые точки функции

Рассмотрим разложение ФКП в ряд Лорана в особой точке.

Устранимая особая точка — это точка в которой разложение функции в ряд Лорана не содержит главной части.

Полюс порядка n — это точка в которой разложение функции в ряд Лорана содержит конечное число слагаемых в главной части, причем старшая степень в знаменателе равна n.

Существенно особая точка — это точка в которой разложение функции в ряд Лорана содержит бесконечное число слагаемых в главной части.

Пример 1. Найти особые точки функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + ...\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + ...,$$

$z = 0$ — устранимая особая точка.

Пример 2. Найти особые точки функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(z - \frac{z^3}{3!} + ...\right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - ...,$$

$z = 0$ полюс 1-го порядка.

Пример 3. Найти особые точки функции $f(z) = e^{1/z}$.

$$f(z) = e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + ...,$$

$z = 0$ — существенно особая точка.

Определение характера особых точек

Пусть z_0 особая точка функции $f(z)$. Тогда

- если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = const$, то z_0 — устранимая особая точка;
- если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, то z_0 — полюс;
- (**Теорема Сохоцкого**) если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует, то z_0 — существенно особая точка.

9.6.3 Нули функции

Пусть n - наименьшая степень в разложении $f(z)$ в ряд Тейлора в точке z_o. Тогда z_o — **нуль порядка** n для $f(z)$.

Способы определить порядок нуля:

- $f(z) = (z - z_o)^n g(z)$, $g(z_o) \neq 0$;
- $f(z_o) = f'(z_o) = \ldots = f^{(n-1)}(z_o) = 0, \quad f^{(n)}(z_o) \neq 0.$

Если точка z_o — нуль порядка n для $f(z)$ и нуль порядка m для $g(z)$, то для функции $f(z) \cdot g(z)$ точка z_o нуль порядка $n + m$.

Теорема. Если z_o — нуль порядка n для $f(z)$ и нуль порядка m для $g(z)$, то для $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ точка z_o: полюс порядка $m - n$, при $n < m$; УОТ при $n \geq m$.

9.7 Вычет. Нахождение вычетов

Вычет функции $f(z)$ относительно точки z_o — это коэффициент c_{-1} в разложении данной функции в ряд Лорана:

$$\operatorname{res}[f(z), z_o] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L f(z)\, dz. \tag{43}$$

Вычисление вычета функции $f(z)$ относительно точки z_o:

- z_o — правильная или устранимая особая точка: $\mathrm{res}[f(z), z_o] = 0$
- z_o — полюс порядка n: $\mathrm{res}[f(z), z_o] = \frac{1}{(n-1)!} \lim\limits_{z\to z_o} \left((z - z_o)^n f(z)\right)^{(n-1)}$
- z_o — существенно особая точка: $\mathrm{res}[f(z), z_o] = c_{-1}$

(!) Если z_o — простой полюс ($n = 1$), а функция представима в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, то имеет место формула: $\mathrm{res}[f(z), z_o] = \dfrac{\varphi(z_o)}{\psi'(z_o)}$.

9.8 Применение вычетов к вычислению интегралов

9.8.1 Вычисление контурных интегралов от ФКП

Теорема Коши о вычетах. $\oint\limits_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{res}[f(z), z_i]$,

где C – контур, D_C – область, ограниченная этим контуром, z_1, z_2, ... $z_n \in D_C$ — особые точки $f(z)$, лежащие внутри C.

Пример. Вычислить $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}\,dz$.

Решение. $f(z) = \dfrac{e^{1/z^2}}{z^2+1}$, $z_{1,2} = \pm i$ — пр. полюса, $z_3 = 0$ — СОТ.

Внутри $|z - i| = 3/2$ находятся $z_1 = i$ и $z_3 = 0$.

$\mathrm{res}\,[f(z), 0] = 0$, т.к. ряд Лорана содержит только чётные степени.

$\mathrm{res}\,[f(z), i] = \dfrac{\varphi(z_o)}{\psi'(z_o)} = \left.\dfrac{e^{-1}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = \left.\dfrac{e^{-1}}{2z}\right|_{z=i} = \dfrac{1}{i2e}$.

Ответ: $I = 2\pi i \left(0 + \dfrac{1}{i2e}\right) = \dfrac{\pi}{e}$.

9.8.2 Вычисление несобственных интегралов ФДП

- Пусть $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости (включая Ox) за исключением конечного числа особых точек z_1, z_2, ... z_n.
- пусть $|f(z)| \le \dfrac{M}{|z|^m}$, $m \ge 2$, $M = const$, при $|z| < R$, $R = const$.

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{res}[f(z), z_i]$.

Если к тому же $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{res}[f(z)e^{iz}, z_i]$.

Пример. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ имеет два простых полюса: $z_{1,2} = \pm i$.

$\mathrm{res}\left[\dfrac{1}{1+z^2}, i\right] = \left.\dfrac{1}{2z}\right|_{z=i} = \dfrac{1}{2i}$. $I = 2\pi i \cdot \dfrac{1}{2i} = \pi$.

9.9 Задания для самостоятельного решения

Найти действительную и мнимую части функции:

1) $w = \bar{z} - iz^2$;
2) $w = z^2 + i$;
3) $w = i - z^3$;
4) $w = \dfrac{1}{\bar{z}}$;
5) $w = \dfrac{\bar{z}}{z}$;
6) $w = 2z - 1$;
7) $w = z + z^2$;
8) $w = z^{-1}$;
9) $w = e^{-z}$;
10) $w = e^{\bar{z}^2}$.

Вычислить интегралы:

11) $\int\limits_L e^{|z|^2} \mathrm{Re}\, z dz$, L - отрезок прямой от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$;
12) $\int\limits_L (2z+1)\bar{z} dz$, $L: \ |z| = 1, 0 \le \arg z \le \pi$.

Найти вычет функции $f(z)$ относительно всех особых точек:

13) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z-2}$;
14) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$;
15) $f(z) = ctg 2z$;
16) $f(z) = \dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

17) Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-i|=2} \dfrac{1-e^{z^2}}{z^2(z-i)}dz$.

Ответы к заданиям. 1) $u = x + 2xy,\ v = y^2 - x^2 - y$; 2) $u = x^2 - y^2,\ v = 1 + 2xy$; 3) $u = 3xy^2 - x^3,\ v = 1 - 3x^2y + y^3$; 4) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2},\ v = \dfrac{y}{x^2+y^2}$; 5) $u = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ v = \dfrac{-2xy}{x^2+y^2}$; 6) $u = 2x - 1,\ v = 2y$; 7) $u = x^2 - y^2 + x,\ v = (2x+1)y$; 8) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2},\ v = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$; 9) $u = e^x \cos y,\ v = -e^x \sin y$; 10) $u = e^{x^2-y^2}\cos 2xy,\ v = -e^{x^2-y^2}\sin 2xy$; 11) $\dfrac{1+i}{4}(e^2-1)$; 12) $-4+\pi i$; 13) $\mathrm{res}[f(z),2] = 5$; 14) $\mathrm{res}[f(z),0] = 1/9$, $\mathrm{res}[f(z),\pm 3i] = \pm\dfrac{i}{54}e^{\pm 3i}$; 15) $\mathrm{res}[f(z),\pi k] = 0,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$; 16) $\mathrm{res}[f(z),0] = 0,\ \mathrm{res}[f(z),1] = 1$; 17) $2(1-1/e)\pi i$.

9.10 Вопросы для самопроверки к разделу 9

1. Что называется числовым рядом?
2. Что называется комплексным числом?
3. Как определяется модуль комплексного числа?
4. Как вычисляется модуль комплексного числа?
5. Как определяется аргумент комплексного числа?
6. Как вычисляется аргумент комплексного числа?
7. Что такое мнимая единица?
8. Что такое мнимая и вещественна часть числа?
9. Что такое ФКП?
10. Что такое мнимая и вещественна ФКП?
11. Как найти мнимую и вещественную часть ФКП?
12. Как вычисляется производная ФКП?
13. Как формулируются условия Коши-Римана?
14. Как определяется ряд Лорана?
15. Что называют особыми точками функциями?
16. Что такое вычет функции в точке?
17. Как вычисляется интеграл от аналитической ФКП?
18. Как вычисляется интеграл по кривой от неаналитической ФКП?
19. Как вычисляется интеграл по замкнутому контуру от ФКП с помощью вычетов?
20. Как вычисляется несобственный интеграл с помощью вычетов?

Литература

Список основной литературы

Вся литература доступна на сайте СибГУТИ.

1. Трофимов, В. К. Дифференциальное исчисление [Текст] : учеб. пособие / В.К. Трофимов, В.И. Агульник ; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск : СибГУТИ, 2013. - 150, [2] с. : ил. - Библиогр.: с. 149-150.

2. Трофимов, В. К. Теория рядов [Текст] : учеб. пособие / В.К. Трофимов, Т.С. Мурзина, Т.Э. Захарова ; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск : СибГУТИ, 2013. - 144, [2] с. : ил. - Библиогр.: с. 144.

3. Захарова, Т. Э. Математический анализ [Текст] : учеб. пособие / Т. Э. Захарова; Сиб.гос.ун-т телекоммуникаций и информатики ; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск : СибГУТИ, 2013. - 50, [1] с.

4. Сборник задач по математическому анализу. 2 семестр [Текст] : учеб. пособие / О.Е. Дмитриева, Т.С.Мурзина, Л.А. Подмогаева, В.К. Трофимов; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск : [б. и.], 2011. - 94с.

5. Дмитриева, О. Е. Сборник задач по математическому анализу. 1 семестр [Текст] : учеб. пособие / О.Е. Дмитриева; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск : [б. и.], 2011. - 71с.

Список дополнительной литературы

1. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию [Электронный ресурс] : учебное пособие для бакалавров / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. — Электрон. текстовые данные. — М. : Дашков и К, 2015. — 432 c. — 978-5-394-01943-2. — Режим доступа:
http://www.iprbookshop.ru/5103.html по паролю

2. Головко О.В. Высшая математика. Часть I. Матрицы и определители. Системы линейных уравнений. Векторная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учебное пособие / О.В. Головко, Г.Н. Дадаева, Е.В. Салтанова. — Электрон. текстовые данные. — Кемерово: Кемеровская государственная медицинская академия, 2006. — 56 c. — 2227-8397. — Режим доступа:

http://www.iprbookshop.ru/6111.html по паролю

3. Высшая математика. Часть II. Математический анализ [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.И. Бухтоярова [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — Кемерово: Кемеровская государственная медицинская академия, 2007. — 92 с. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/6112.html по паролю